

## **Mordet på Schrödingers kat**

et metaprojekt om fortolkninger af kvantemekanikken

Hermannsson, Maria; Horst, Peter Sebastian; Specht, Christina

*Publication date:*  
1995

*Document Version*  
Også kaldet Forlagets PDF

*Citation for published version (APA):*  
Hermannsson, M., Horst, P. S., & Specht, C. (1995). *Mordet på Schrödingers kat: et metaprojekt om fortolkninger af kvantemekanikken*. Roskilde Universitet. Tekster fra IMFUFA Nr. 298  
<http://milne.ruc.dk/ImfufaTekster/>

### **General rights**

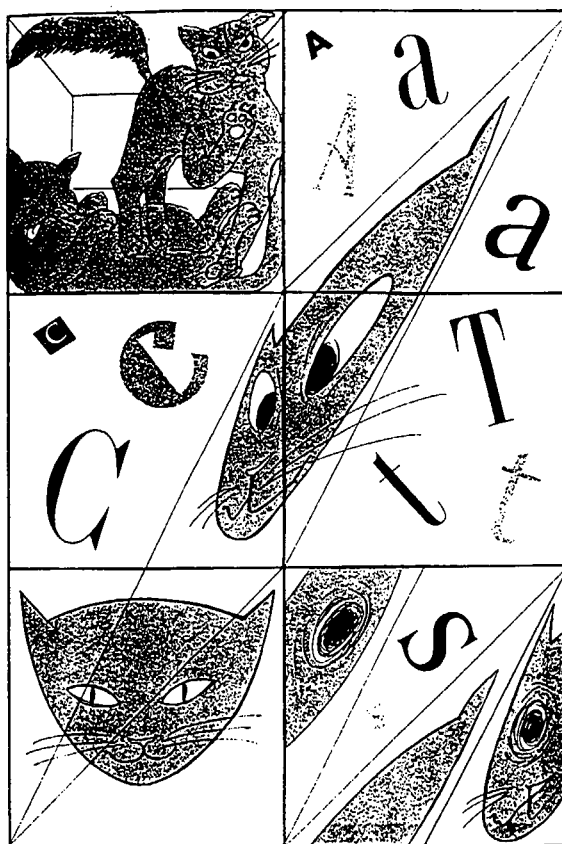
Copyright and moral rights for the publications made accessible in the public portal are retained by the authors and/or other copyright owners and it is a condition of accessing publications that users recognise and abide by the legal requirements associated with these rights.

- Users may download and print one copy of any publication from the public portal for the purpose of private study or research.
- You may not further distribute the material or use it for any profit-making activity or commercial gain.
- You may freely distribute the URL identifying the publication in the public portal.

### **Take down policy**

If you believe that this document breaches copyright please contact [rucforsk@kb.dk](mailto:rucforsk@kb.dk) providing details, and we will remove access to the work immediately and investigate your claim.

**Mordet på Schrödingers kat**  
**- et metaprojekt om to fortolkninger af**  
**kvantemekanikken.**



**Maria Hermannsson, Sebastian Horst og**  
**Christina Specht**

**Vejledere: Jeppe Dyre og Peder Voetmann Christiansen.**

## TEKSTER fra

## IMFUFA

**ROSKILDE UNIVERSITETSCENTER**  
INSTITUT FOR STUDIET AF MATEMATIK OG FYSIK SAMT DERES  
FUNKTIONER I UNDERVISNING, FORSKNING OG ANVENDELSER

IMFUFA, Roskilde Universitetscenter, postbox 260, 4000 Roskilde

Mordet på Schrödingers kat

- et metaprojekt om to fortolkninger af kvantemekanikken.

af: Maria Hermannsson, Sebastian Horst og Christina Specht

Vejledere: Jeppe Dyre og Peder Voetmann Christiansen

IMFUFA tekst nr. 298/95 92 sider

ISSN 0106-6242

---

### Abstract

Projektrapporten er et metaprojekt på fysikoverbygningen og er skrevet i efteråret 1994 og foråret 1995 på IMFUFA, RUC.

Projektet handler om et af grundlagsproblemerne i kvantemekanikken: Hvorfor ser man ikke interferens af makroskopisk forskellige tilstande hørende til en given operator. Vi ser på to fortolkninger, dekoherensfortolkningen og mange-verden-fortolkningen, som begge giver et bud på løsningen, men som er meget forskellige. Som gennemgående eksempel optræder det såkaldte Schrödingers kat paradoks.

Vi når frem til at forkaste mange-verden fortolkningen, da den bygger på fejlagtige antagelser. I vores redegørelse for dekoherensfortolkningen ser vi først på en model af Roland Omnès, og opstiller derefter selv en model, som vi i et konkret eksempel (ammoniakmolekylet) regner på. I dekoherensfortolkningen medtages elementer af termodynamikken for at forklare, hvorfor man ikke ser makroskopisk interferens. Konklusionen er, at dette beskrivelsesniveau må medtages, og at dekoherensfortolkningen giver et godt bud på løsning af problemstillingen.

Forsidebilledet er fra P. Cvitanovic et al., ed.: "Quantum Chaos — Quantum measurement".

# Indhold

<b>Indledning</b>	<b>3</b>
<b>1 Systemer og måleapparater</b>	<b>7</b>
1.1 Kvanteformalisme . . . . .	7
1.2 Måleproblemet . . . . .	10
1.3 Tilbage til Schrödingers kat . . . . .	13
<b>2 Mange-verden fortolkningen af kvantemekanikken</b>	<b>15</b>
2.1 Everetts "Relative State" formulering . . . . .	16
2.2 Observation . . . . .	20
2.3 Schrödingers kat i mange-verden fortolkningen . . . . .	24
<b>3 Dekohærens</b>	<b>25</b>
3.1 Kvantemekanisk beskrivelse af ensemblesystemer . . . . .	27
3.2 At regne på dekohærens . . . . .	30
3.3 Schrödingers kat fortolket med dekohærens . . . . .	33

<b>4</b>	<b>En anden model for dekoherens</b>	<b>35</b>
4.1	Karakteristik af måleapparatet . . . . .	37
4.2	Et godt eksempel - Ammoniakmolekylet . . . . .	41
4.3	Dekoherenstid . . . . .	43
4.4	Tunneleringsid . . . . .	46
4.5	Dobbelpotentialbrønden . . . . .	50
4.6	Opsummering . . . . .	61
<b>5</b>	<b>Fortolkninger og metafysik</b>	<b>63</b>
5.1	Hvorfor fortolke? . . . . .	63
5.2	Sprogets betydning . . . . .	66
5.3	Vurdering af fortolkninger . . . . .	70
<b>6</b>	<b>Diskussion</b>	<b>73</b>
6.1	En kritik af MV-fortolkningen . . . . .	73
6.2	En kritik af dekoherens . . . . .	77
6.3	Konklusion . . . . .	82
<b>A</b>	<b>Udregninger af dekoherens</b>	<b>83</b>
	<b>Litteraturliste</b>	<b>89</b>

# Indledning

En kat er placeret i en beholder, der er uigennemsigtig, lyd- og lufttæt og indeholder udover katten lidt radioaktivt materiale, en geigertæller, en ampul med giftgas og en mekanisme, der smadrer ampullen, når den udløses. Når der er gået et vist tidsrum, er det muligt, at et af de radioaktive atomer er henfaldet. Sker der et henfald, registreres det af geigertælleren, mekanismen udløses, giftgassen fordeler sig i beholderen, og katten dør.

Om der er sket et henfald eller ej, beskriver man udfra kvantemekanikken på den måde, at et radioaktivt atom i materialet er i en superposition af to tilstande; henfaldet og ikke-henfaldet.

Men hvad nu med katten? Hvis et atom er henfaldet, er katten død - hvis ikke, lever den. Vi kan ikke afgøre denne sag, før vi åbner kassen og ser efter. Indtil da må katten ligeledes befinde sig i en superposition af de to mulige tilstande; død og levende, da den jo grundlæggende også består af atomer. Men hvem har nogensinde hørt om en kat, der både er levende og død på samme tid? Vores fornuft siger os, at enten er katten død eller også er den levende.

Dette tankeeksperiment er et af de mere berømte i fysikken og blev udtænkt af E. Schrödinger i 1935 for at vise det absurde i at opfatte kvantemekanikkens bølgefunktioner som egenskaber ved naturen. En del af københavnerfortolkningen gik på dette tidspunkt netop ud på, at en superpositionsbeskrivelse af systemet ikke bare afspejler vores uvidenhed om dette, men at systemet faktisk befinder sig i denne superposition. Sålænge man beskæftiger sig med mikroskopiske systemer fx en elektron, kan det accepteres, men Schrödinger fandt netop på dette eksempel for at vise problematikken på det makroskopiske plan. Det er kendt som schrödingers kat paradokset og giver os et klart billede af en af kvantemekanikkens store gåder:

### Hvorfor ser man ikke interferens af makroskopisk forskellige tilstande?

Vi vil i nærværende projektrapport undersøge netop denne problemstilling, som der findes mange forskellige løsninger på. Vi har valgt at beskæftige os med mangeverden-fortolkningen og dekoherensfortolkningen, der er to udlægninger af kvantemekanikken, der dels giver et bud på, hvorfor man ikke ser makroskopisk interferens, og dels er meget forskellige. At vi har valgt disse to fortolkninger fremfor andre skyldes, at de på mange måder repræsenterer to ekstremer i spektret af fortolkninger, der er givet af kvantemekanikken, og en forståelse af dem skulle derfor gerne bidrage til et overblik over de fortolkninger, der i det hele taget er givet af kvantemekanikken.

Vi vil gerne nå frem til en forståelse af mangeverden-fortolkningen og dekoherensfortolkningen, der giver os mulighed for at vurdere fortolkningernes bud på, hvorfor man ikke ser interferens af makroskopisk forskellige tilstande. En sådan forståelse kræver, at vi går i dybden med dem, og vi får derfor lejlighed til at beskæftige os med de erkendelsesteoretiske og fortolkningsmæssige problemer, der er knyttet hertil. Vi vil på denne måde gerne nå lidt længere omkring, end man gør på et grundlæggende kvantemekanikkursus, hvor man primært lærer at beherske kvanteformalismen.

Rapporten er resultatet af et metaprojekt og er derfor hverken en lærebogsagtig indføring i grundlæggende kvantemekanik eller en svært tilgængelig afhandling på avanceret niveau. Vi ønsker at henvende os til læsere som har kendskab til kvanteformalismen svarende til et almindeligt grundlæggende kursus heri. Vi har i selve rapporten bestræbt os på at begrænse antallet af matematiske udledninger, således at læsere uden nævnte forudsætninger også kan få glæde af rapporten. Dette har blandt andet betydet, at vi har valgt at sætte en del af en noget omfattende udledning i appendix, som den interesserede læser, der vil have flere detaljer med, henvises til. Kilder er angivet som [efternavn, årstal] og kan findes i litteraturlisten bagest i projektet.

Når man i kvantemekanikken omtaler måleproblemet, drejer det sig som regel om to ting: Makroskopisk interferens og at vi ved en måling går fra flere mulige tilstande til een faktisk. Schrödingers kat paradokset, som vi fremover vil referere til som SKP, er et udtryk for problemet med makroskopisk interferens, og når vi siden hen taler om måleproblemet, er det kun denne del, vi refererer til.

Vi vil i kapitel 1 præcisere SKP og give den formalistiske udgave af paradokset, hvorefter vi i kapitlerne 2-4 beskæftiger vi os med de to fortolkninger og deres bud på løsning af måleproblemet. Inden diskussionen af disse to i kapitel 6, må vi se på, hvad vi forstår ved en fortolkning af en fysisk teori, og hvorfor fortolkninger overhovedet er nødvendige. Dette gøres i kapitel 5. Diskussionen afsluttes med konklusion på problemformuleringen.





# Kapitel 1

## Systemer og måleapparater

I dette kapitel vil vi til at starte med genopfriske lidt kvanteformalisme og to af kvantemekanikkens grundpostulater: For det første at kvantemekanisk system kan beskrives ved en bølgefunktion. For det andet at man ved en måling forstår et kollaps af bølgefunktionen.

Vi får brug for at indføre et mere generelt sprogbrug, idet vi nu taler om system og måleapparat. I termer af SKP er atomerne i det radioaktive materiale systemet (vi ønsker at undersøge om atomerne i materialet henfalder eller ej), og katten er måleapparatet (ved at være død eller levende registrerer den, om der er sket henfald). Vi skal se, at hvis man dels insisterer på at betragte det hele under ét, dvs. som et system indeholdende både måleapparatet og det objekt, der måles på og dels insisterer på, at dette system kan beskrives med en bølgefunktion, så opstår makroskopisk interferens som konsekvens.

### 1.1 Kvanteformalisme

Har vi givet et system, fx en elektron, i forhold til en given observabel, kan vi beskrive det ved hjælp af en bølgefunktion  $|\psi(t)\rangle$  der er systemets tilstand til tiden  $t$ . Bølgefunktionen er en beskrivelse af denne tilstand i rum og tid og er, (hvis vi antager, vi har en fri partikel, der bevæger sig ikke-relativistisk), en løsning til den én-dimensionale schrödingerligning:

$$i\hbar \frac{\partial \psi(x,t)}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi(x,t)}{\partial x^2} = H\psi(x,t) \quad (1.1)$$

hvor  $H$  er energioperatoren også kaldet hamiltonoperatoren. Schrödingerligningen løses ved separation af variable. Man kan da bestemme energiegentilstandene hørende til  $H$  og de tilhørende energiegenverdier, der er de værdier af den observable (her energien), man kan finde ved en måling på systemet. Det er karakteristisk for kvantemekaniske systemer, at de er kvantiserede, dvs. kun bestemte egentilstande og egenverdier hørende til en given operator, vil forekomme.

Normalt vil et system skulle beskrives som værende i en superposition af flere egentilstande hørende til den operator, man har opskrevet egenverdiligningen for. Bølgefunktionen vil typisk se således ud:

$$|\psi\rangle = \sum_{n=1}^N \mu_n |a_n\rangle \quad (1.2)$$

hvor  $N$  betegner antallet af egentilstande  $|a_n\rangle$  hørende til en hermitisk operator  $A$ , og  $\mu_n$  er sandsynlighedsamplituden. Absolutkvadratet på  $\mu_n$  er sandsynligheden for, ved en måling af observablen beskrevet ved  $A$ , at få egenværdien  $a_n$ .

Ved en måling af en observabel går systemet fra at være i en superposition af egentilstande, til at være i een egentilstand for operatoren. Man siger, at målingen har kollapsed bølgefunktionen.

En måling på et kvantemekanisk system er altså karakteriseret ved, at der dels finder et kollaps af bølgefunktionen sted, og dels at udfaldet af målingen ikke på forhånd er kendt. Man kan kun udtale sig om sandsynligheden for at få en bestemt værdi som udfald af en måling. Det kan man præcisere således: Hvis vi har  $N$  fuldstændig ens præparerede systemer givet ved bølgefunktionen  $|\psi\rangle$ , og vi på alle systemer foretager den samme måling — så vil vi statistisk set finde  $|\mu_n|^2 \cdot N$  systemer i tilstanden  $|a_n\rangle$ .

Al stof er opbygget af atomer, der igen består af protoner, neutroner og elektroner. Der burde derfor i princippet ikke være forskel på, om vi ser på et system bestående af en elektron eller en kat (der består af utrolig mange atomer). Når elektroner kan beskrives som værende

i superpositioner af forskellige egentilstande for en bestemt observabel, burde det vel også være tilfældet med katten, der jo i den forstand blot er et utrolig kompliceret kvantemekanisk system. Kvantemekanikkens udsagn om at et system vil være i en superposition af egentilstande hørende til en given operator, før vi foretager en måling af en observabel, forekommer paradoksal, når der er tale om en superposition af en død og en levende kat.

Man skal dog gøre sig klart, at paradokset ikke udelukkende opstår, fordi katten er et makroskopisk system, men også fordi "livligheden" af katten er en observabel, hvis tilhørende egentilstande er *skelnelige*. Man kan udmærket have observable for makroskopiske systemer, der ikke er skelnelige. Energiegentilstande for et pendul er et eksempel på et makroskopisk system, der udviser ikke-skelnelig makroskopisk interferens for observablen energi. Pendulet vil udføre svingninger omkring en ligevægtsposition og er dermed i en superposition af energiegentilstande, og da pendulet er et makroskopisk system, er det et eksempel på makroskopisk interferens. Vi må derfor præcisere problemet med makroskopisk interferens til at være *interferens af makroskopisk skelnelige egentilstande*.

Disse overvejelser forhindrer ikke SKP i at opstå, for "død" og "levende" er bestemt skelnelige! Det virker helt fornuftsstridigt, at skulle beskrive schrödingers kat som værende i en superposition af tilstandene død og levende, indtil vi har kigget ned i kassen og kollapsede bølgefunktionen og dermed tvunget en af tilstandene frem. Der er da ej heller observeret interferens af sådanne tilstande, men det er selvfølgelig ikke noget definitivt argument for at afskrive fænomenet; det er blot en induktiv regel, som vi ikke kan bruge, når den står alene. Man kan jo som bekendt ikke påstå (eller i det mindste være sikker på), at der ikke findes sorte svaner, blot fordi man aldrig har set een. Makroskopisk superposition er dog af en lidt anden kaliber end sorte svaner!

Man benytter ofte von Neumanns formulering fra 1932 til at karakterisere en måling<sup>1</sup>. Han karakteriserer en måling som en proces, hvorved et makroskopisk måleapparat under målingen af en observabel er i stand til at kollapse bølgefunktionen for et mikroskopisk system, således at systemet kun er i een egentilstand for observablen — den, som måleapparatet viser. Med denne definition af en måling forsvinder problemet med makroskopisk interferens, men til gengæld giver

---

<sup>1</sup>[Omnés, 1994], side 72.

det måleprocessen en mystisk evne til fuldstændigt at afgøre systemets tilstand i forhold til den observabel, man har målt. Det ville dog være rarere, om man kunne beskrive måleprocessen i kvantemekanikken ligesom i andre grene af fysikken; nemlig som en kontrollerbar vekselvirkning mellem system og måleapparat. Kontrollerbar fordi den i princippet kan gøres så lille, som vi ønsker det.

Forsøget på at undgå at give måleprocessen et sådant mystisk præg, medfører, at vi skal beskrive måleapparatet kvantemekanisk, og så dukker problemet med makroskopisk superposition op igen, hvis vi ser på en observabel, hvis egentilstande hørende til en given operator er skelnelige. For hvis vi "snyder" ved at inkludere måleapparatet, når vi opskriver bølgefunktionen for systemet for en given observabel, opstår problemet alligevel. Skal vi kunne sige noget om systemets observabel, har vi brug for endnu en observatør udenfor systemet til at observere, hvad der sker, og inkluderer vi observatøren i systemet, har vi brug for endnu en observatør osv. Vi synes at ende i en uendelig kæde af vekselvirkninger mellem systemer, der bliver større og større, indtil hele universet er indbefattet i en abnorm superposition. Det er dette, som vi i næste afsnit skal se nærmere på.

## 1.2 Måleproblemet

Vælger man en observabel for sit system, opskriver den tilhørende operator, løser egenværdiligningen og opskriver en bølgefunktion, kan man ved hjælp af schrödingerligningen beskrive systemets udvikling i rum og tid. Det mest oplagte i forhold til en måling ville være, at også den kunne beskrives ved schrödingerligningen i stedet for at antage kollapspostulatet og dermed kun beskrive systemets tilstand før og efter en måling. Det er imidlertid ikke muligt at opskrive schrödingerligningen for et hvilket som helst system. Schrödingerligningen er kun gældende for *isolerede systemer*.

Ved isolerede systemer forstås i denne sammenhæng, at man fx godt kan opskrive hamiltonoperatoren for en elektron i et ydre potential, men man antager, at systemet ikke virker tilbage på omgivelserne. Det vil sige, at omgivelsernes påvirkning af systemet skal kunne beskrives med klassiske felter.

Dette er ikke opfyldt, når man måler størrelsen af en observabel, hvor man jo netop registrerer, hvordan systemet påvirker måleapparatet. Vi kan derfor ikke opskrive schrödingerligningen for systemet under måleprocessen, fordi systemet i den situation ikke er isoleret, når det vekselvirker med måleapparatet. Vi er nødt til at have en anden beskrivelse af selve målesituationen.

Hvad nu, hvis vi vælger at bruge kollapspostulatets metode med at beskrive systemets tilstand før og efter en måling, men tillige vælger at inkorporere måleapparatet i systemet?

Lad os, inden vi går videre, overveje, hvorfor det er nødvendigt at inddrage måleapparater: Vi er med vore sanser ikke i stand til at opfatte verden på kvantemekanisk niveau og må derfor indirekte gennem et måleapparat registrere det, der foregår. En kvantemekanisk måling må nødvendigvis indbefatte en eller anden form for forstærkning af fænomenet, der så kan opfanges af et måleapparat og synliggøres via et display, et viserudslag eller lignende.

Vi beskriver nu systemets og måleapparatets starttilstand.

Først ser vi på systemet  $Q$ . Før målingen er foretaget, kan vi i et simpelt kvantemekanisk system kun udtale os om sandsynligheden for at observere en værdi af en bestemt observabel. Starttilstanden af systemet beskrives som en superposition af egentilstande  $|a_n\rangle$  hørende til operatoren  $A$ .

$$|\psi_Q\rangle = \sum_n \mu_n |a_n\rangle \quad (1.3)$$

**Måleapparatet** kalder vi for  $M$  og resultatet af målingen for  $b_n$ . Inden målingen viser måleapparatet værdien  $b_0$ . Det antages, at det er muligt at opskrive en bølgefunktion for måleapparatet, som et produkt af de variable, der ikke indgår i vekselvirkningen mellem systemet og måleapparatet, og de variable, der gør. Den samlede bølgefunktion for måleapparatet kan så skrives som  $|b_n r\rangle$ , hvor  $|b_n\rangle$  er bølgefunktionen for de variable, der indgår i vekselvirkningen og  $|r\rangle$  er bølgefunktionen for de variable, der ikke indgår i vekselvirkningen.

Starttilstanden for måleapparatet kan derfor, idet den del af bølgefunktionen, der har med vekselvirkningen at gøre, betegnes  $|b_0\rangle$ , opskrives således:

$$|\psi_M\rangle = |b_0r\rangle_M \quad (1.4)$$

Indekset  $M$  ændres efter målingen til  $M'$ , fordi der kan ske småændringer i måleapparatet under målingen. For eksempel kan nogle af atomerne i måleapparatet have en højere energi, hvis måleapparatet har absorberet fotoner stammende fra systemet, der måles på. Disse ændringer er dog ubetydelige i forhold til den målte størrelse, og indekset er blot med for fuldstændighedens skyld.

Nu ønsker vi en samlet beskrivelse af system og måleapparat:  $Q + M$ .

Til start vekselvirker systemet og måleapparatet ikke, og de beskrives hver med et hilbertrum. Det samlede system beskrives som tensorproduktet af de to rum.

$$|\psi_Q\rangle \otimes |\psi_M\rangle = \sum_n \mu_n |a_n\rangle \otimes |b_0r\rangle_M \quad (1.5)$$

Det, vi hidtil har beskrevet, er systemet og måleapparatet isoleret. Når vi foretager en måling, vekselvirker de, men da vores system befinder sig i en superposition af egentilstande for  $A$ , vil måleapparatet, når vekselvirkningen finder sted, "følge med". Derfor vil måleapparatets bølgefunktion efter målingen bestå af en superposition af egentilstande  $|b_nr'\rangle$ , hvor hvert element i superpositionen modsvarer et element i superpositionen af egentilstande i bølgefunktionen for systemet.

Rent teknisk indføres konstanten  $c_{rr'}^{(n)}$ , som er sandsynlighedsamplituden for måleapparatets tilstande. Man får da, at måleprocessen beskrives ved transitionen:

$$\sum_n \mu_n |a_n\rangle \otimes |b_0r\rangle_M \longrightarrow \sum_{nr'} \mu_n |a_n\rangle \otimes c_{rr'}^{(n)} |b_nr'\rangle_{M'} \quad (1.6)$$

Dette er måleproblemet formuleret formelt. For hvis bølgefunktionen for måleapparatet efter målingen er en superposition af egentilstande for vores observabel betyder det, at vi på samme tid har flere tal på displayet.

## 1.3 Tilbage til Schrödingers kat

Vender vi tilbage til SKP, viser det sig, at formuleringen af måleproblemet også er en formulering af paradokset. Katten fungerer jo som måleapparat: Hvis den er levende, er atomet ikke henfaldet, hvis den er død, er atomet henfaldet. Formuleres dette i kvanteformalismen opstår netop den situation, at katten må være i en superposition af død og levende.

Tilhængere af det, man ofte betegner københavnerfortolkningen af kvantemekanikken<sup>2</sup>, vil indvende, at det aldrig kommer så vidt. Overgangen fra det mikroskopiske kvantesystem til det makroskopiske system, som i sin opførsel skulle rette sig efter den klassiske fysik, er sket langt før, vi når til katten. Overgangen sker i detektoren, der registrerer det radioaktive henfald, og fra detektoren og "opefter" opfører alt sig som beskrevet med klassisk fysik. At vi ikke kan tilskrive katten en bestemt tilstand skyldes blot uvidenhed om, hvorvidt den er død eller levende, og det har intet at gøre med, at katten er i en superposition af død og levende!

Problemet med københavnerfortolkningen, når man beskæftiger sig med makroskopisk interferens, er, at den reducerer SKP til ikke at være noget problem, for en kat er definitivt et makroskopisk system. Vi ser ikke makroskopisk interferens, fordi det er den klassiske fysiks love, der er gældende for makroskopiske systemer og i den klassiske fysik kan man ikke samtidigt have flere forskellige værdier af en observabel, der har skelnelige egentilstande.

Et modargument er, at det jo ikke er vores manglende viden om, hvilken tilstand katten er i, der er interessant, men derimod den manglende forskel mellem makroskopisk og mikroskopisk. Det er for så vidt ligegyldigt, hvor overgangen fra mikroskopisk til makroskopisk er — spørgsmålet er om den overhovedet er der! For i princippet er det lige så absurd, at en detektor er i en superposition af at have detekteret noget og ikke at have detekteret noget, som at en kat er i superpositionen af død og levende.

Den "rene" kvantemekanik, dvs. bølgemekanikken, fortæller os intet om, hvorfor det såkaldte kollaps skulle ske ved en måling, men derimod

---

<sup>2</sup>Det er noget problematisk at tale om københavnerfortolkningen, da der ikke udelukkende findes én beskrivelse af denne. Men vi vil anvende betegnelsen om den opfattelse af kvantemekanikken, som kommer til udtryk i [Favrholdt, 1994].



at når to systemer, hvor af det ene er i en superposition af egentilstande for en given operator, vekselvirker, bliver superpositionen overført til det andet system. Vi kan derfor ikke trække nogen grænse mellem mikroskopisk og makroskopisk på det grundlag.

At rækken af vekselvirkninger mellem systemer i paradokset netop ender ved superpositionen af en død og en levende kat skyldes blot, at det netop viser det absurde for alle og enhver. Man kan sige at forgiftningsmekanismen virker som en forstærker, der gør tilstandene henfaldet og ikke-henfaldet skelnelige. Ved netop at vælge observablen "livlighed" får man desuden en situation, hvor ingen kan være tvivl om det groteske i situationen.

Nu har vi jo svært ved at afgøre, hvordan katten oplever situationen. Men så kan man i stedet kigge lidt på en af varianterne af paradokset, hvor vi erstatter katten med et menneske (måske ovenikøbet en fysiker!) for at kunne spørge vedkommende, hvordan det var at være både død og levende, indtil vi åbnede beholderen og fandt personen levende.<sup>3</sup> Vedkommende vil højst sandsynlig sige, at han/hun intet har mærket og været aldeles levende under hele forløbet. Vi har altså stadigvæk et problem. Varianten gør blot uoverensstemmelsen mellem kvantemekanikken og dagligdags oplevelser af virkeligheden mere synlig.

Det kan altså ikke lade sig gøre at løse paradokset ved at gribe til kunstgreb så som at erstatte katten med et væsen, der kan kommunikere, eller inkludere måleapparatet i det system, hvis udvikling vi beskriver. Der må være en anden forklaring på, hvorfor vi ikke ser superpositioner af makroskopisk forskellige tilstande. Er det forstærkningsmekanismen, der gør, at vi ikke ser den, eksisterer superpositionen overhovedet? Er der en grænseovergang mellem mikroskopisk og makroskopisk, og hvor kvantemekanikken ikke har berettigelse længere? Vi vil i kapitlerne 2 til 4 undersøge et par af de mulige svar.

---

<sup>3</sup>I det tilfælde at personen er død, fordi atomet er henfaldet og giftampullen slået itu, er der selvfølgelig ikke så meget at stille op — udover at gentage forsøget med en ny forsøgsperson og håbe, at vi denne gang får et andet resultat.

## Kapitel 2

# Mange-verden fortolkningen af kvantemekanikken

Vi skal i dette kapitel beskæftige os med en fortolkning af kvantemekanikken, som giver et bud på løsningen af SKP og dermed forklarer, hvorfor man ikke ser makroskopisk interferens. Den går som regel under navnet mange-verden fortolkningen (fremover forkortet MV-fortolkningen), men måske er det mere korrekt at benævne den mange-verden *formuleringen* af kvantemekanikken, hvis man – som vi i det følgende vil gøre – tager udgangspunkt i originalartiklen om MV-fortolkningen: Hugh Everett III's artikel i *Reviews of Modern Physics*, 1957 [Everett, 1957].

Vi har valgt at beskæftige os med MV-fortolkningen fordi den, udover at give et muligt svar på vores problemformulering, også er interessant set som sociologisk fænomen i fysikersamfundet. MV-fortolkningen er i allerhøjeste grad en kontroversiel fortolkning af kvantemekanikken og kan umiddelbart synes meget "langt ude". Alligevel er der mange fysikere, der tror på den. Især blandt streng-teoretikere og kvantekosmologer er den meget populær. Dette bekræftes af en større artikel på Internet's netnews, som handler om MV-fortolkningen [Price, 1995].

Den første formulering af MV-fortolkningen finder man i Hugh Everett's artikel fra 1957 [Everett, 1957]. Den vakte ikke den store opsigt i fysikerverdenen, da den udkom. I 1973 udkom imidlertid bogen "*The many-worlds interpretation of quantum mechanics*" redigeret af Bryce S. DeWitt og Neill Graham. Det medførte at mange fik øjnene op for

MV-fortolkningen [Baggott,1992], og interessen for Hugh Everetts artikel steg. Som tidligere nævnt findes der idag en del tilhængere af MV-fortolkningen og en del, der har lavet tilføjelser og justeringer, fx. David Deutsch.

Til trods for den megen interesse for og forsøg på udvikling af MV-fortolkningen, ligner MV-varianternes væsentligste antagelser dem, som indgår i Everetts oprindelige formulering. Udviklingen har ikke ændret præmisserne og argumenterne væsentligt, og vi har derfor i forhold til at ville undersøge disse elementer fundet en forholdsvis detaljeret gennemgang af Everetts artikel relevant.

## 2.1 Everetts "Relative State" formulering

Artiklen er et sammendrag af Everetts Ph.D.-afhandling og et forsøg på at reformulere kvantemekanikken for at undgå kollapspostulatet. Den er således ikke et opgør med den konventionelle kvanteformalisme, men snarere en udvidelse/tilføjelse, som den kendte formalisme kan udledes fra. Dermed kan der - ifølge Everett - laves en mere generel og fuldstændig formulering af kvantemekanikken.

Dette understreges af, at der, som han skriver, egentlig ikke er den store afstand fra den "gamle teori". Forbindelsen mellem den nye og den gamle teori er *"..that of a metatheory to a theory, that is, it is an underlying theory in which the nature and consistency, as well as the realm of applicability, of the older theory can be investigated and clarified."*<sup>1</sup>

Everett starter med at se på *observatørens rolle* i standardformuleringen af kvantemekanikken, som han i denne forbindelse meget betegnende kalder "external observation"-formuleringen. Dette er fordi hans analyse af observatørens status i standardformuleringen viser, at der er en implicit antagelse om en ydre observatør. Han anvender her terminologi og notation i overensstemmelse med Von Neumanns formuleringer<sup>2</sup>.

<sup>1</sup>[Everett, 1957], s. 454.

<sup>2</sup>J. von Neumann: "Mathematical Foundations of Quantum Mechanics", Princeton, 1955.

Han begynder sin analyse med at præsentere to af postulaterne i standardformuleringen, som beskriver hvordan et system kan udvikle sig i tid:

- **Proces 1** *Diskontinuert ændring — måling.* Den frembringes ved observation af en størrelse med egentilstande  $\phi_1, \phi_2, \dots$  i hvilken tilstanden  $\psi$  vil ændres til tilstanden  $\phi_j$  med sandsynligheden  $|\langle \psi, \phi_j \rangle|^2$
- **Proces 2** *Kontinuert og deterministisk ændring,* Tilstanden af et isoleret system udvikler sig i tid som  $\frac{\partial \psi}{\partial t} = A\psi$ , hvor  $A$  er en lineær operator.

Everett gør i denne forbindelse den betydelige antagelse, at et fysisk system er fuldstændig beskrevet ved en tilstandsfunktion  $\psi$ .

Han argumenterer herefter for at undlade proces 1, som er det, man betegner bølgefunktionens kollaps. Når man i kvantemekanikken taler om observation, mener man underforstået *ydre observation*, dvs. man har et objektsystem, der iagttages af en ydre observatør. Proces 1 kan kun bruges i disse tilfælde og er ude af billedet, når vi taler om systemer, som *ikke* er subjekt til ydre observation.

Ifølge Everett er ikke alle tænkelige situationer indeholdt i proces 1 og 2. Har vi fx et måleapparat og et objektsystem, og betragter dette samlet som et isoleret system, er situationen analog til den vi havde i kapitel 1, hvor SKP opstod som konsekvens af, at vi beskrev katten og måleapparatet som et samlet, isoleret system. Everett bruger nu ikke SKP som argument for, at der må noget andet end standardformuleringen til, men argumenterer med, at postulaterne, om at et kvantemekanisk system er beskrevet ved proces 1 eller 2, rummer en *modsigelse*, når vi har et system bestående af både observatør og objektsystem.

Hvis vi kan beskrive den tidlige udvikling af observatør-objekt systemet ved proces 2, så kan proces 1 ikke samtidigt beskrive den, fordi en beskrivelse med proces 2 kræver at systemet er isoleret, og det er det jo netop ikke, når det vekselvirker med et måleapparat. Hvis vi derimod mener, at vi ikke kan bruge proces 2 som beskrivelse – en beskrivelse, der er enighed om er gyldig for isolerede systemer uden observatører – så står vi i en situation, hvor der gælder én slags beskrivelse for systemer,

der *indeholder* observatører (en ren proces 2 udvikling), og en anden for andre fysiske systemer (både en proces 2 og en proces 1 udvikling).

Eftersom problemerne opstår, når vi insisterer på at mene at systemer udvikler sig efter proces 1, foreslår Everett, at vi helt undlader proces 1 og betragter proces 2 (tidslig udvikling) – også kaldet ren bølgemekanik – som en fuldstændig teori. Vi har så en situation, hvor en bølgefunktion, som adlyder en lineær bølgeligning overalt og til alle tider, leverer en fuldstændig matematisk model for ethvert isoleret system — uden undtagelse. Vi undgår helt proces 1, fordi ethvert system, som er subjekt til en ydre observation, kan anses som del af et større isoleret system, hvori observatøren indgår.

Fordi "observatører" spiller en så fremtrædende rolle i Everett's præmisser gør han lidt ud af forklare, hvad han mener med "observatør". Han skelner ikke mellem apparatur og mennesker som observatører. Blandt andet von Neumann var på et tidspunkt fremme med en teori om at bølgefunktionens kollaps først skete, når observationen foretages af en bevidst observatør. Vi formoder, at det er denne diskussion, Everett søger at undgå.

Udover at antage, at vi kan undlade kollapspostulatet, mener Everett, at bølgefunktionen skal forstås som – og her kommer en af hans vægtigste antagelser – en grundlæggende fysisk entitet, uden nogen *a priori* fortolkning. Fortolkningen finder sted sidenhen: *"Interpretation only comes after an investigation of the logical structure of the theory. Here as always the theory itself sets the framework for its interpretation."*<sup>3</sup>

Efter at have gjort disse antagelser, kommer Everett med en mere formel formulering af måleproblemet. Han undersøger konsekvenserne af at prøve at beskrive sammensatte systemer, dvs. et system bestående af både observatør og objektsystem, men antager nu, at det samlede system udelukkende udvikler sig efter proces 2, dvs. ren bølgemekanik.

Hvis et system  $S$  er sammensat af to delsystemer  $S_1$  og  $S_2$  med tilhørende hilbertrum  $H_1$  og  $H_2$ , så vil hilbertrummet  $H$  for  $S$  være tensorproduktet  $H = H_1 \otimes H_2$ . Det har den konsekvens, at hvis mængderne  $\{\xi_i^{S_1}\}$  og  $\{\eta_j^{S_2}\}$  er fuldstændig ortonormale mængder af tilstande for  $S_1$  og  $S_2$ , så kan den generelle tilstand af  $S$  skrives som en superposition heraf:

---

<sup>3</sup>[Everett, 1957], side 455.

$$\psi^S = \sum_{i,j} a_{ij} \xi_i^{S_1} \eta_j^{S_2} \quad (2.1)$$

hvor  $a_{ij}$  er en sandsynlighedsamplitude.  $S$  er i en bestemt tilstand  $\psi^S$ . Delsystemerne  $S_1$  og  $S_2$  kan derimod ikke beskrives som isolerede størrelser; de kan kun beskrives som relative tilstande, idet de ikke kan besidde tilstande uafhængigt af hinanden, da de jo vekselvirker. Vil vi beskrive  $S_1$  eller  $S_2$  kan vi for ethvert valg af tilstand i et delsystem, unikt fastsætte en tilsvarende relativ tilstand i det andet delsystem. Hvis vi fx vælger  $\xi_k$  som tilstanden for  $S_1$ , så vil den tilsvarende relative tilstand for  $S_2$  være:

$$\psi(S_2; \text{rel.} \xi_k, S_1) = N_k \sum_j a_{kj} \eta_j^{S_2} \quad (2.2)$$

hvor  $N_k$  er en normaliseringskonstant. For at finde den relative tilstand af  $S_2$  for en vilkårlig tilstand af  $S_1$ , så udføres ovenstående procedure, hvor man anvender et eller andet sæt af baser for  $S_1$  og  $S_2$ , som indeholder den ønskede tilstand som et element af basen for  $S_1$ . I standardformuleringen af kvantemekanikken, vil den relative tilstand i  $S_2$ ;  $\psi(S_2; \text{rel.} \phi, S_1)$  for en tilstand  $\phi^{S_1}$  i  $S_1$  give den betingede sandsynlighedsfordeling for resultaterne af alle målingerne i  $S_2$ , forudsat at  $S_1$  er blevet målt og fundet til at være i tilstanden  $\phi^{S_1}$  dvs. at  $\phi^{S_1}$  er en egenfunktion af målingen i  $S_1$  svarende til den observerede egenværdi.

For ethvert valg af basis i  $S_1$ ;  $\{\xi_i\}$  er det muligt at repræsentere tilstanden af  $S$  som en enkelt superposition af par af tilstande, hver bestående af en tilstand fra basen  $\{\xi_i\}$  i  $S_1$  og den relative tilstand i  $S_2$ . Vi kan således udfra de to foregående ligninger skrive:

$$\psi^S = \sum_i \frac{1}{N_i} \xi_i^{S_1} \psi(S_2; \text{rel.} \xi_i, S_1) \quad (2.3)$$

Opsummerende kan det siges, at delsystemer er ikke uafhængige af det øvrige system. Deres tilstande kan derfor kun beskrives som *relative* tilstande og siges derfor at være korrelerede. Det vil for alle situationer gælde, at vælger vi én tilstand for et delsystem, vil tilstanden af "restdelsystemet" været givet relativt i forhold til delsystemet. Eventuelt konkluderer: "*Thus we are faced with a fundamental relativity of*

*states, which is implied by the formalism of composite systems. It is meaningless to ask the absolute state of a subsystem — one can only ask the state relative to a given state of the remainder of the subsystem.*"<sup>4</sup>

Dette gælder således også for sammensatte systemer bestående af et måleapparat og et vilkårligt objektsystem, der vekselvirker ved en måling. Som resultat af vekselvirkningen kan tilstanden af måleapparatet ikke længere defineres uafhængigt, men kun relativt til tilstanden af objektsystemet.

Ved målingen opstår en korrelation mellem tilstanden af de to systemer — men for Everett er det også det eneste, der sker! Alle elementer af superpositionen eksisterer simultant og hele processen — målingen — forløber kontinuert. Dette er i modsætning til bølgefunktionens kollaps, hvor det kun er ét enkelt element af superpositionen, der eksisterer, når der har fundet en måling sted.

Men denne opførsel er jo fuldstændig i strid med vores observationer af makroskopiske fysiske systemer: De er netop *ikke* i superpositioner af positioner; vi ser altid en viser stå ét sted, når vi måler. For at få denne kvanteformalisme, som jo kun bygger på den kontinuerte proces 2, til at stemme overens med vores erfaring med verden, ser Everett herefter på selve det der foregår, når vi siger at et måleapparat "observerer" et objekt.

## 2.2 Observation

En observatør må besidde bestemte egenskaber, som gør den<sup>5</sup> i stand til at observere på et system. I denne forbindelse rækker det at antage, at observatøren besidder en form for hukommelse, hvori der sker registreringer, når en vekselvirkning finder sted. Med hukommelse menes, at observatøren indeholder elementer, hvis tilstande bevares permanent relativt set. Det kan fx være en plet på en fotografisk plade.

Hvis en observatør beskrevet med bølgefunktionen  $\psi^0$  indeholder en hukommelse, der har registreret begivenhederne  $A, B, \dots, C$  kan vi markere dette således:

<sup>4</sup>[Everett, 1957], side 456.

<sup>5</sup>Som bekendt skelner Everett ikke mellem måleapparater og bevidste observatører. Derfor kan vi betegne en observatør som "den".

$$\psi^0[A, B, \dots, C] \quad (2.4)$$

Symbolerne  $A, B, \dots, C$  står ordnet i kronologisk rækkefølge og (2.4) kan således fortolkes som at "observatøren har erfaret begivenhederne  $A, B, \dots, C$ ", hvor prikkerne markerer begivenheder som er irrelevante i sammenhængen. Hvis vi så ser på et system bestående af observatør og objektsystem  $S$ , hvis oprindelige tilstand er givet ved  $\psi^S = \sum_i a_i \phi_i$ , får vi, at målingen giver overgangen fra

$$\psi^{S+0} = \sum_i a_i \phi_i \psi^0[\dots] \quad (2.5)$$

til

$$\psi'^{S+0} = \sum_i a_i \phi_i \psi^0[\dots \alpha_i] \quad (2.6)$$

hvor  $\alpha_i$  står for, at hukommelsen har registreret en værdi. Hvis observatøren for anden gang vekselvirker med objektsystemet, må vi forvente følgende resultat:

$$\psi''^{S+0} = \sum_i a_i \phi_i \psi^0[\dots, \alpha_i, \alpha_i] \quad (2.7)$$

Dette gælder imidlertid kun ét objektsystem. Everett udvider nu sin model til at omfatte flere objektsystemer, som til start er i samme tilstand  $\psi^{S_1} = \psi^{S_2} = \dots = \psi^{S_n} = \sum_i a_i \phi_i$ , hvorpå vi lader observatøren 0 i tilstanden  $\psi^0[\dots]$  foretage måling af den samme observabel  $A$ , som har egenfunktionerne  $\phi_i$ .

Ved den første måling får vi overgangen fra

$$\psi_0^{S_1+S_2+\dots+S_n+0} = \psi^{S_1} \psi^{S_2} \dots \psi^{S_n} \psi^0[\dots] \quad (2.8)$$

til

$$\psi_1^{S_1+S_2+\dots+S_n+0} = \sum_i a_i \phi_i^{S_1} \psi^{S_2} \dots \psi^{S_n} \psi^0[\dots \alpha_i^1] \quad (2.9)$$

Efter at den anden måling har fundet sted, har vi



$$\psi^{S_1+S_2+\dots+S_n+0} = \sum_{i,j} a_i a_j \phi_i^{S_1} \phi_j^{S_2} \psi^{S_3} \dots \psi^{S_n} \psi^0[\dots \alpha_i^1, \alpha_j^2] \quad (2.10)$$

Efter måling  $r$  ( $r \leq n$ ) får vi generelt

$$\psi_r^{S_1+S_2+\dots+S_n+0} = \sum_{i,j,\dots,k} a_i a_j \dots a_k \phi_i^{S_1} \phi_j^{S_2} \dots \phi_k^{S_r} \psi^{S_{r+1}} \dots \psi^{S_n} \psi^0[\dots \alpha_i^1, \alpha_j^2, \dots \alpha_k^r] \quad (2.11)$$

Denne tilstand  $\psi_r$  kan vi fortolke som bestående af en superposition af tilstande

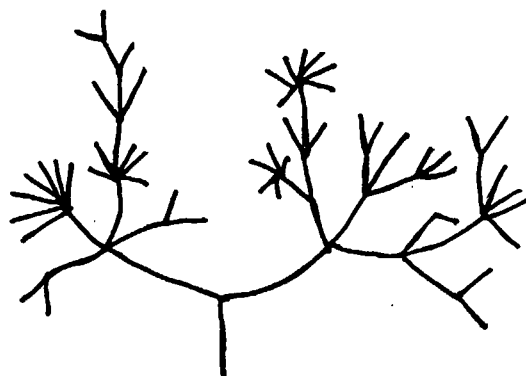
$$\psi'_{i,j,\dots,k} = \phi_i^{S_1} \phi_j^{S_2} \dots \phi_k^{S_r} \times \psi^{S_{r+1}} \dots \psi^{S_n} \psi^0[\dots \alpha_i^1, \alpha_j^2, \dots \alpha_k^r] \quad (2.12)$$

hvor der til hver hører en hukommelseskonfiguration  $[\alpha_i^1, \alpha_j^2, \dots \alpha_k^r]$ . Betragt herefter en redetermination af et tidligere undersøgt system  $S_l$ . Efter denne observation må hukommelsen se ud som  $[\alpha_i^1, \dots \alpha_j^l, \dots \alpha_k^r, \alpha_l^l]$ , dvs. at hukommelsestilstandene for observatøren er korrelerede.

Everett konkluderer heraf, at det for observatøren vil se ud som om, at når vi laver en første måling på et system, bevirker det, at systemet "hopper" til en egentilstand for en bestemt operator på en randomiseret måde og forbliver der, når der efterfølgende laves målinger på det samme system.

Gennem en hel række af observationsprocesser er der kun ét fysisk system, der repræsenterer observatøren. Men der er ikke en unik *tilstand* at observatøren, som er repræsenteret i termer af en superposition, hvor hvert superpositionselement repræsenterer en observatørtilstand og en tilsvarende systemtilstand. Det betyder at "*with each succeeding observation (or interaction), the observer state "branches" into a number of different states.*"<sup>6</sup> Hver "gren" som vist på figur 2.1 repræsenterer et forskelligt udfald af målingen og dermed en egentilstand af en bestemt operator for objekt-systemtilstanden. Everett mener, at alle grene eksisterer *samtidigt* efter en given række af observationer.

<sup>6</sup>[Everett, 1957], s. 459.



**Figur 2.1:** Hver gren i træet repræsenterer et element i superpositionen.

Everett uddyber denne konklusion i en fodnote. Han skriver, at læsere(n) sikkert vil undres over overgangen fra *mulig* (dvs. mulige tilstande) til *faktisk* (dvs. den tilstand, der observeres). Som argument mod Everetts konklusioner vil læseren måske sige, at i realiteten er der — som vores erfaring også viser — ingen opsplitning af observatørtilstande, og der kan derfor kun være én "gren" som reelt eksisterer.

Everett mener imidlertid, at der ikke er nogen grund til at skelne mellem *mulig* og *faktisk*. I forhold til teorien er det unødvendig. Alle elementer af superpositionen er *faktiske* — ingen mere end andre. Det er unødvendigt at antage at alle undtagen een, er "tilintetgjort", da alle separate elementer af en superposition individuelt adlyder bølgefunktionen og ikke påvirkes af de andre elementer i superpositionen. Dette tolker Everett som at "grenene" ikke påvirker hinanden, og at man følgelig ikke kan observere dem. Ingen observatør vil nogensinde være i stand til at "føle" eller "se" denne opsplitning.

At man ikke kan observere, at verden splitter op i mange verdener (heraf fortolkningens navn) imødegår Everett ved at sammenligne med den kritik det kopernikanske verdensbillede mødte. Her var argumentet, at man ikke kunne tro på, at jorden var i bevægelse rundt om solen, da dette var umuligt for os, der bor her på jorden at sanse (og i strid med sund fornuft). Everett mener, at det samme må være tilfældet med hans teori. Det kan ikke bruges som argument mod teorien, at det er umuligt at se opsplitningen. Et sådant "sanser"-argument falder, når teoriens

forudsigelser stemmer overens med vores erfaringer. I det kopernikanske tilfælde var opkomsten af den newtonske mekanik nødvendig for at vise, at jorden bevæger sig, skønt dens beboere ikke kan sanse dens bevægelse.

Det er Everetts mål at vise, at hans formulering af kvantemekanikkens uden antagelsen om bølgefunktionens kollaps, giver de samme resultater som standardformuleringen. Derfor beskæftiger han sig i resten af artiklen med at få løst de problemer, der opstår i forhold til at formulere standardformuleringens resultater i den nye formalisme. Bl.a. overvejer han, hvorledes sandsynligheden for at få en given egenværdi som følge af en måling af en bestemt observabel kan formuleres i hans udlægning af kvantemekanikken. Han når her frem til nøjagtig de samme resultater som anvendes i standardformuleringen.

### 2.3 Schrödingers kat i mange-verden-fortolkningen

MV-fortolkningens bud på løsning af SKP er ganske enkelt, at katten ikke befinder sig i en superposition af "død" og "levende". Da der ikke er forskel på *mulig* og *faktisk*, medfører superpositionen af tilstandene af det radioaktive atom, at verden forgrener sig i to: Een hvor atomet er henfaldet og katten død og en anden, hvor atomet ikke er henfaldet og katten er levende. Superposition af makroskopisk forskellige tilstande undgås, fordi superpositioner af tilstande egentlig slet ikke findes. Der findes derimod én verden for hver mulig tilstand af systemet.

## Kapitel 3

### Dekoherens

Mange af de fortolkninger, der er givet af kvantemekanikken, kan med en vis ret siges at være opstået i forsøget på at løse kvantemekanikkens paradokser og der argumenteres ofte for fortolkningerne ved, at de løser et eller flere af dem — også schrödingers kat. Dekoherensfortolkningen er efter vores mening et oplagt bud på, hvorfor makroskopisk forskellige tilstande ikke opstår, og dermed en løsning til SKP. Men på trods af dette, er dekoherens ikke noget, man støder på i diverse populære fremstillinger af kvantemekanikken. Dekoherens har imidlertid været kendt siden 1920'erne og skal derfor ikke opfattes som nyt og revolutionerende.

Når man lærer klassisk fysik, ser man ofte bort fra *friktion*. Hvis vi fx betragter omdannelse fra elektrisk energi til mekanisk energi, siger vi, at processen er reversibel — omdannelsen kunne lige så godt ske den anden vej. Men i praksis er det jo *ikke* sådan, at vi kan koble en generator på en elektromotors aksel og så få den samme elektriske energi ud af generatoren, som vi brugte til at drive elektromotoren med. Der er tabt energi i processen, fordi systemet er dissipativt. Dette energitab skyldes netop friktion. Der er gnidning mellem de forskellige mekaniske dele, som derfor bliver opvarmet. Det gælder ligeledes for de elektriske komponenter og ledninger, der bliver varme pga. modstanden i dem. Det hele kan betragtes som forskellige udgaver af friktion.

Hvis man tager højde for friktionen, som jo til tider kan være besværlig at have med at gøre, finder man, at næsten ingen processer eller systemer i praksis fuldstændig kan isoleres fra deres omgivelser. Reversible processer er derfor i bedste fald i *praksis* kun tilnærmelsesvis reversible.

Schrödingerligningen er derimod (matematisk set) fuldstændig reversibel, og de systemer, som den kan bruges til at beskrive, må være isoleret fra omgivelserne. Termodynamikkens anden hovedsætning foreskriver, at for isolerede systemer gælder:

$$\Delta S_{tot} \geq 0 \quad (3.1)$$

hvor  $S_{tot}$  er den totale entropi af alle dele af det isolerede system. For de irreversible processer gælder den ægte ulighed og for de reversible gælder lighedstegnet, da den reversible proces er en fin balanceret række af ændringer, hvor systemet *hele* tiden er i ligevægt.

Men når vi foretager en måling, kræver vi jo netop, at der skal ske en eller anden form for registrering, som relativt set er varig, og en sådan registrering er jo irreversibel. Det kan fx være en plet på en fotografisk plade. Eller det kan som i SKP være udladningen i et Geiger-Müller-rør, der opfanger ioniserende stråling fra et henfaldet atom. Denne kvantemekaniske udgave af friktion kaldes *dekoherens* [Omnès, 1994]. Det er ikke noget særlig mystisk eller eksotisk begreb, men et fænomen som man ud fra forholdsvis enkle antagelser kan regne på.

Dekoherens opstår i makroskopiske systemer, som har mange frihedsgrader, og de kan derfor kun beskrives som ensemblesystemer, hvilket vil sige en statistisk beskrivelse. Det skal understreges, at dekoherens er en tidslig proces — vi kan formulere det således: *Hvis et ensemble-system til tiden 0 er i en superposition af egentilstande hørende til en given operator vil det tidsligt udvikle sig mod at være i en enkelt egentilstand for operatoren.* Dekoherens udelukker altså i princippet ikke, at superposition af makroskopisk forskellige tilstande kan opstå. Men den tid, de kan eksistere i, er meget lille. Så lille, at det er meget vanskeligt at observere dem<sup>1</sup>.

Et makroskopisk objekt vil vi betragte som formelt bestående af to dynamiske systemer; det ene beskrevet ved de makroskopiske (eller kollektive) koordinater og det andet beskrevet ved de mikroskopiske koordinater. Ønsker vi at opskrive hamiltonoperatoren for et makroskopisk system, kan vi vælge at opdele beskrivelsen af det i disse parametre. Vi kan skrive den totale hamiltonoperator som bestående af to dele  $H = H_m + H_i$ , hvor  $H_m$  da kun afhænger af de makroskopiske observable og  $H_i$  kun af de mikroskopiske. Gennemsnitsværdien

<sup>1</sup>[Omnès, 1994], s. 269.

af  $H_m$  er den mekaniske energi og gennemsnitsværdien af  $H_i$  er den indre energi, som de bruges i termodynamikken. Der er imidlertid ikke medtaget *koblingen* mellem de to energiformer, hvilket må betyde, at der ikke sker nogen udveksling mellem de to former for energi. Termisk dissipation kan føres tilbage til eksistensen af en kobling mellem de to former for energi, så hamiltonoperatoren bør skrives som

$$H = H_m + H_i + H_k \quad (3.2)$$

hvor  $H_k$  betegner "koblings"-hamiltonoperatoren, som afhænger af begge typer variable, hvorved man kan få en energioverførsel mellem de to energiformer og dermed tillader dissipation. Denne kobling resulterer i dekoherens. Da en mere formel forklaring heraf kræver, at man kender til den kvantemekaniske beskrivelse af ensemblesystemer – eller i al fald elementer af den – vil vi gennemgå den i det følgende.

### 3.1 Kvantemekanisk beskrivelse af ensemblesystemer

I et enkeltpartikelsystem er middelværdien af en observabel  $A$  givet ved

$$\langle A \rangle = \langle \psi | A | \psi \rangle \quad (3.3)$$

så for at kunne beregne middelværdien af en observabel  $A$  i et system, har vi umiddelbart brug for at kende til bølgefunktionen for systemet. Ønsker vi at regne på mere komplicerede systemer, selv i det relativt simple tilfælde, hvor vi har et system bestående af mange *identiske* partikler, viser det sig imidlertid, at det ikke er muligt at opskrive en bølgefunktion<sup>2</sup>.

I enkeltpartikelsystemer er det antaget, at systemet er præpareret. Man kender samtlige tilstande af partiklen (og sandsynligheden for at finde partiklen i netop denne tilstand). Der skal ikke ret meget fantasi til at forestille sig, at der er meget at holde styr på, hvis systemet består af flere partikler med forskellige tilstande og sandsynligheder tilknyttet de enkelte tilstande.

---

<sup>2</sup>Afsnittet her er baseret på [Joachain, 1989], s. 601-605.

I et ensemblesystem kender man ikke systemets tilstand, men derimod kender man *sandsynligheden* for at finde systemet i en given tilstand (der normalt er en superposition af egentilstande hørende til operatoren  $A$ ), ligesom man kender  $A$ 's egentilstande,  $|n\rangle$  i systemet, dvs. de udfald man kan få ved måling af størrelsen  $A$ . Vi kan ikke opskrive systemets bølgefunktion, og derfor kan det umiddelbart ikke lade sig gøre at finde middelværdien af en observabel i et ensemblesystem. Det viser sig imidlertid, at vi ved at udtrykke systemtilstandene i en basis af egentilstande hørende til operatoren  $A$  kan nøjes med at kende sandsynlighedsfordelingen af tilstandene.

Lad os antage vi har et ensemble bestående af  $N$  identisk præparerede systemer med tilstande  $1, \dots, \alpha$  ( $\alpha \leq N$ ), som man kan opskrive en bølgefunktion,  $|\alpha\rangle$  for. Bølgefunktionerne antages at være normaliserede.

Egentilstandene hørende til operatoren  $A$ , karakteriseres ved  $|n\rangle$ , der er ortonormale, og vi vælger dem som basis for tilstandsrummet.

Hver systemtilstand udtrykkes i basis'en som

$$|\alpha\rangle = \sum_n c_n^{(\alpha)} |n\rangle \quad (3.4)$$

Vi kan finde middelværdien for vores observabel  $A$  for en af de tilstande  $1, \dots, \alpha$ , som vi ved findes i systemet, da vi jo kender tilstandsfunktionen for dem. Samtidig kan vi ved hjælp af (3.4) opskrive  $\langle A \rangle$  i termer af systemets egentilstande.

$$\langle A \rangle_\alpha = \langle \alpha | A | \alpha \rangle = \sum_n \sum_{n'} c_n^{(\alpha)} c_{n'}^{(\alpha)*} \langle n' | A | n \rangle \quad (3.5)$$

Det har vi umiddelbart ikke megen nytte af, da vi ikke ved hvilke systemer i ensemblet, der er i tilstand  $|\alpha\rangle$ . Men vi kan udtrykke  $\langle A \rangle$  ved hjælp af  $\langle A \rangle_\alpha$ , da vi jo kender sandsynlighedsfordelingen af  $\langle A \rangle_\alpha$ :

$$\langle A \rangle = \sum_{\alpha=1}^N W_\alpha \langle A \rangle_\alpha \quad (3.6)$$

$W_\alpha$  er den statistiske vægt tillagt de enkelte tilstande i ensemblet, dvs. sandsynligheden for at et system i ensemblet er i tilstand  $|\alpha\rangle$ .

Ved indsættelse fås:

$$\langle A \rangle = \sum_{\alpha=1}^N \sum_n \sum_{n'} W_{\alpha} c_n^{(\alpha)} c_{n'}^{(\alpha)*} \langle n' | A | n \rangle \quad (3.7)$$

$$= \sum_{\alpha=1}^N \sum_n \sum_{n'} \langle n | \alpha \rangle W_{\alpha} \langle \alpha | n' \rangle \langle n' | A | n \rangle \quad (3.8)$$

Ved at indføre tæthedsoperatoren  $\rho$  som kort notation for

$$\rho = \sum_{\alpha=1}^N |\alpha\rangle W_{\alpha} \langle \alpha| \quad (3.9)$$

opnår man, at  $\langle A \rangle$  kan udtrykkes som:

$$\begin{aligned} \langle A \rangle &= \sum_n \sum_{n'} \langle n | \rho | n' \rangle \langle n' | A | n \rangle \\ &= \sum_n \langle n | \rho A | n \rangle \\ &= \text{Tr}(\rho A) \end{aligned} \quad (3.10)$$

Her står Tr for trace og er altså sporet af matricen  $\rho A$ . Bemærk at tæthedsoperatoren nu opfattes som en matrix opskrevet i forhold til egentilstandene  $|n\rangle$ , og at den på matrixform ville have set anderledes ud ved et andet valg af basis. De enkelte elementer i tæthedsoperatoren har en vigtig fysisk fortolkning: Et diagonalelement angiver *sandsynligheden* for at finde et af systemerne i tilstand  $|n\rangle$ . Et off-diagonalelement fortæller os noget om interferensen af tilstandene  $|n\rangle$  og  $|n'\rangle$ , således at hvis off-diagonalelementerne er nul, vil systemet ikke kunne befinde sig i en superposition af egentilstande hørende til operatoren  $A$ .

Vi ser altså, at sporet – selv om vi ikke ved ret meget om systemet – kan findes udfra de kendte størrelser  $W_{\alpha}$  og egentilstandene  $|n\rangle$  hørende til operatoren  $A$ . Ensemble-beskrivelsen kan således bruges til en beskrivelse af systemer i blandede tilstande, og her spiller tæthedsoperatoren samme rolle, som bølgefunktionen gør for systemer i rene tilstande.



## 3.2 At regne på dekoherens

Dekoherens er noget man kan regne på og teoretisk vise forekommer. Vi vil i dette afsnit gennemgå **hovedtrækkene** i udregningerne. Læsere, der er interesserede i detaljerne henvises til appendix. Uanset om man læser appendix eller ej, skal man være opmærksom på, at vores udregninger i appendix afspejler det **simplest mulige tilfælde**. Faktisk er det udregnede eksempel for simpelt til at vise, at der opstår dekoherens, men appendix kan være en hjælp til at forstå/udregne de mere komplicerede tilfælde, og i forhold til at illustrere princippet i dekoherens er vores eksempel dog repræsentativt.

Vi betragter et system<sup>3</sup> bestående af to partikler, der hver har to egentilstande hørende til operatoren  $A$ . Kaldes egentilstandene hørende til  $A$  for  $|+\rangle$  og  $|-\rangle$ , (og  $a$  og  $b$  er sandsynlighedsamplituderne for de to tilstande), er der fire mulige tilstande det samlede system, dvs. begge partikler, kan være i.

$$\begin{aligned}
 &|+\rangle \otimes |+\rangle \\
 &|-\rangle \otimes |+\rangle \\
 &|+\rangle \otimes |-\rangle \\
 &|-\rangle \otimes |-\rangle
 \end{aligned} \tag{3.11}$$

Som vi har set i kapitel 1, tager man tensorproduktet af tilstandene for de to systemer, når man ønsker en samlet systembeskrivelse. Det antages, at vi kan skelne mellem partiklerne (de er mærket med "1" og "2") og den første "søjle" refererer derfor til tilstanden af den første partikel og den anden til tilstanden af den anden partikel.

For at forsimple udregningerne yderligere vælger man den ene partikel ud og "omgivelserne" udgøres af den anden partikel.

Udgangspunktet for udregningerne er dels, at man betragter et ensemblesystem, dels at man betragter observablen energi og medtager dissimationsleddet i hamiltonoperatoren. De to andre led i hamiltonoperatoren ligning (3.2) sættes til 0, for hvis der ingen kobling er, så vil

<sup>3</sup>Det følgende er baseret på [Omnès, 1994], hvis fremstilling bygger på [Zurek, 1982].

de to tilstande have samme energi. Formålet er jo at undersøge, hvordan systemet tidsligt udvikler sig, når man medtager dissipationsleddet — så derfor er resten af hamiltonoperatoren i princippet uinteressant.

Det første skridt er at opskrive bølgefunktionen for systemet til tiden 0. Det samlede system beskrives, som tensorproduktet af bølgefunktionen for den ene partikel, hhv. den anden partikel. Man kan herefter som vanligt beskrive systemets udvikling i tid ud fra

$$|\psi(t)\rangle = e^{-iH_k t/\hbar} |\psi(0)\rangle \quad (3.12)$$

hvor  $H_k$  er hamiltonoperatoren for vekselvirkningen.  $H_k$  antages at være givet ved

$$H_k = \hbar g \sigma_z \sigma'_z, \quad (3.13)$$

hvor  $g$  er en koblingskonstant og  $\sigma_z, \sigma'_z$  er analoge til paulimatricerne i en spinmåling. Mærket angiver, at der er tale om omgivelsespartiklen.

Efter at have opskrevet løsningen til schrödingerligningen som gjort i ligning (3.12), lader man  $e^{-iH_k t/\hbar}$  virke. Hermed er systemets udvikling i tid beskrevet.

Vi så før i beskrivelsen af ensemblesystemet, at man kunne udregne middelværdien af den observable ud fra tæthedsoperatoren  $\rho = |\psi(t)\rangle \langle \psi(t)|$ . Vi koncentrerer os nu udelukkende om den ene partikel og dens vekselvirkning med "omgivelserne" (den anden partikel). Man skal derfor finde den såkaldte *reducerede* tæthedsoperator  $\rho_r$ , hvilket gøres ved at tage det partielle spor af af tæthedsoperatoren  $\rho$  med hensyn til "omgivelsespartiklens" frihedsgrader,  $\rho_r(t) = \text{Tr}_{\text{omgiv.}}(\rho(t))$ .

For vores simple system får vi (jvf. appendix) den reducerede tæthedsoperator til

$$\begin{aligned} \rho_r(t) = & |a|^2 |+\rangle \langle +| + |b|^2 |-\rangle \langle -| \\ & + z^*(t) a b^* |+\rangle \langle -| + z(t) a^* b |-\rangle \langle +| \end{aligned} \quad (3.14)$$

hvor

$$z(t) = \cos(2gt) + i(|\alpha|^2 - |\beta|^2) \sin(2gt) \quad (3.15)$$

og hvor  $\alpha$  og  $\beta$  er sandsynlighedsamplituderne for "omgivelses"-partiklens tilstande  $|+\rangle$  og  $|-\rangle$ . Skrevet på matrixform bliver det

$$\rho_r(t) = \begin{pmatrix} |a|^2 & z^*(t)ab^* \\ z(t)a^*b & |b|^2 \end{pmatrix} \quad (3.16)$$

Men hvad kan vi så bruge det til? Det vi gerne skulle se var, at off-diagonalelementerne i ligning (3.16) går hen og bliver nul, efterhånden som tiden går — og det sker jo tydeligvis ikke, når vi regner på vores simple system bestående af en partikel og dens "omgivelses"-partikel. Det, vi må gøre, er at udvide modellen således, at omgivelserne består af  $N$  partikler. Princippet i udregningerne er nøjagtig de samme (de er blot mere indviklede), eftersom vi nu får vekselvirkningshamiltonoperatoren (jvf. ligning (3.13)) til

$$H_k = \hbar \sum_k^N g_k \sigma_z \sigma_z^k, \quad (3.17)$$

Det giver et udtryk, som er nøjagtig magen til (3.16), men nu er  $z(t)$  givet ved

$$z(t) = \prod_{k=1}^N \cos(2g_k t) + i(|\alpha_k|^2 - |\beta_k|^2) \sin(2g_k t) \quad (3.18)$$

Det er således  $z(t)$ , der styrer off-diagonalelementernes værdi, og vi må derfor se på betingelserne for denne funktion. I et fysisk eksempel vil tilstanden af omgivelserne være statistisk tilfældig, og værdierne af  $(|\alpha_k|^2, |\beta_k|^2)$  vil derfor som regel være forskellige fra værdierne  $(1, 0)$  eller  $(0, 1)$ . Hvis koblingskonstanterne  $g_k$  yderligere antages at have tilfældig fordeling, kan det vises, at

$$z(0) = 1, \quad |z(t)|^2 \leq 1$$

og

$$\langle z(t) \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T z(t) dt = 0 \quad (3.19)$$

Derudover gælder, at

$$\langle |z(t)|^2 \rangle = 2^{-N} \prod_{k=1}^N (1 + (|\alpha_k|^2 - |\beta_k|^2)^2) \quad (3.20)$$

og derfor må  $z$ -funktionen gå mod 0 for  $N$  gående mod uendelig, dvs. for systemer med mange frihedsgrader, hvilket makroskopiske systemer som måleapparater jo netop er.

Dekoherens er altså et fysisk fænomen, der ihvertfald i teorien forekommer i mange-partikelsystemer. Det forklarer, hvorfor man ikke ser makroskopisk interferens. Partiklernes indbyrdes vekselvirkning "udslukker" så at sige superpositioner af egentilstande af en given operator. Den tid, som det tager at ødelægge superpositionen, kan man i princippet regne på, og man vil som tidligere nævnt iflg. Omnés typisk få meget korte tider ud af det.

Dekoherens fortæller os også, at vi ikke skal prøve at definere en grænse mellem, hvad der er mikroskopisk, og hvad der er makroskopisk: Der er ikke nogen grænse, for der er netop tale om en *overgang* mellem "få" og "mange" partikler, hvor sandsynligheden, for at superpositioner af egentilstande for en given operator forekommer, bliver mindre og mindre jo flere partikler systemet består af.

### 3.3 Schrödingers kat fortolket med dekoherens

Dekoherens må levere en forklaring på schrödingers kat paradokset. Vi har beskrevet et system, som er kompliceret, men som må karakteriseres som simpelt sammenlignet med en kat. Det er derfor ikke sikkert, at man kan lave en model, hvor man kan regne på et så kompliceret tilfælde som en kat, men når vi kan vise, at sandsynligheden for interferens går mod nul for et mere simpelt system, må dette også være tilfældet for

katten. Vi kan derfor sige, at katten til et hvilket som helst tidspunkt må være død eller levende — da sandsynligheden for interferens mellem disse to makroskopisk forskellige tilstande meget hurtigt går mod nul.

---

## Kapitel 4

### En anden model for dekoherens

Vi vil i det følgende vise, at der vil opstå dekoherens ved en måling, dvs. en vekselvirkning mellem system og måleapparat, men på en lidt anderledes måde. Vi tager udgangspunkt i termodynamikkens 2. hovedsætning og fluktuations-dissipationsteoremet, som vi i denne sammenhæng kan opfatte som et udsagn om, at hvis man har et system, hvori der foregår dissipation, så vil der være fluktuationer, dvs. støj i systemet<sup>1</sup>.

Vi vil kort prøve at forklare hvad fluktuations-dissipationsteoremet går ud på. Hvis vi har en gas (ved normalt tryk og temperatur) vil hvert enkelt molekyle i gassen bevæge sig omkring. Disse bevægelser kan beskrives med en random walk. Dette kan sammenlignes med myldretrafikken i en storby. Det er for den enkelte nærmest en umulig opgave at beskrive bevægelsen af alle de andre trafikanter, så derfor laver vi en beskrivelse af hver enkelt trafikant, som bevægede han sig tilfældigt. Dette er en approximation, men sålænge der er mange trafikanter, er det en god approximation. Alle disse individuelle variationer i rute kan vi også kalde fluktuationer i trafikken.

I en gas er der rigtig mange molekyler og vi kan derfor også tale om fluktuationer i gassen. Alle disse molekyler, der bevæger sig rundt mellem hinanden, kan ikke undgå at støde ind i hinanden, og der opstår

---

<sup>1</sup>Det er beskrevet i detaljer i D.K.C Macdonald "Noise and fluctuations", Wiley and sons, New York, 1962.

dermed dissipation i systemet. Men hvad nu hvis vi sænker temperaturen? Vi ved, at dette betyder, at den termiske hastighed af molekylerne sænkes, og hvis den bliver nul — er da al bevægelse stoppet? Hertil må svares nej, idet selv den laveste tilstand vil have en energi, der er større end nul. Dette kan vises ud fra følgende eksempel: Hvis en kvantemekanisk oscillator udsættes for gnidning vil den tabe energi, og hvis gnidningen ikke er forbundet med fluktuationer, vil oscillatoren ende med at ligge helt stille — altså med energien nul. Men dette er i strid med Heisenbergs ubestemthedsrelationer, idet oscillatoren ifølge disse må have en nulpunktsenergi på  $\frac{1}{2}\hbar\omega$ . Gnidning dvs. dissipation må derfor nødvendigvis være forbundet med fluktuationer, som netop sikrer, at oscillatoren har en nulpunktsenergi. Vi kan derfor sige, at i systemer, hvor der forekommer dissipation, vil der altid forekomme fluktuationer eller støj.

Når man foretager en måling, finder der en irreversibel proces sted. En måling er karakteriseret ved at der afsættes et mærke, fx et aftryk på en fotografisk plade. Det kan vi også udtrykke sådan, at tiden har en retning (og ikke kan vendes), når man beskæftiger sig med irreversible processer. Det er en udlægning af termodynamikkens anden hovedsætning, der også kan udtrykkes som at entropien vokser, når der finder irreversible processer sted. Da entropien vokser må der være sket en eller anden form for dissipation. Det var i forrige kapitel netop dissipation i systemet, der gav anledning til dekoherens. Med fluktuations-dissipationsteoremet ved vi, at der også vil være støj i systemet. Forekomsten af dissipation kan vi så udnytte på den måde, at vi for måleapparatet kan opskrive en hamiltonoperator, der indeholder en støjfunktion.

Efter vi i næste afsnit har beskrevet denne støjfunktion, ser vi på et konkret tilfælde, hvor vi ved et overslag vil bestemme, hvor lang tid det tager, før der opstår dekoherens. Dette sammenlignes med tunneleringstiden i det konkrete tilfælde, og vi slutter med at studere en model (dobbeltpotentialbrønden) for at se hvilke parametre vores system må have, for at dekoherenstiden og tunneleringstiden er af samme størrelsesorden.

Ved en måling vil man fra start have korrelerede tilstande, der tidsligt udvikler sig til at være ukorrelerede. Pointen er, at det ikke er overraskende, at korrelerede tilstande udvikler sig mod at være ukorrelerede, fordi det er en konsekvens af termodynamikkens 2. hovedsætning. Resultaterne i kapitel 3, hvor dissipation i systemet giver anledning til en

tidslig udvikling mod ukorrelerede tilstande, byder derfor ikke på nogen overraskelser.

Hvad menes der egentlig med korrelerede og ukorrelerede tilstande? I kvanteformalismen undlader man ofte fasefaktoren  $e^{i\phi}$ , når man opskriver bølgefunktionen, fordi den kun ændrer på sandsynlighedsamplituden, men ikke absolutkvadratet, dvs. sandsynligheden.

Ifølge spektralteoremet kan enhver tilstand opløses på en sum af egentilstande

$$|\psi_0\rangle = \sum_k c_k |k\rangle \quad (4.1)$$

hvor  $|\psi_0\rangle$  er tilstanden af systemet til tiden 0,  $c_k$  er sandsynlighedsamplituderne og  $|k\rangle$  er egentilstandene til en given operator. Sandsynlighedsamplituderne kan skrives som

$$c_k = |c_k| e^{i\phi_k} \quad (4.2)$$

hvor  $e^{i\phi_k}$  er faseren for den  $k$ 'te egentilstand. *Korrelede tilstande* er tilstande, hvor faseforskellen er *veldefineret*. Faseforskellen skal altså for korrelerede tilstande ikke nødvendigvis være konstant; vi skal blot kunne beskrive udviklingen af faseforskellen. *Ukorrelerede tilstande* er tilstande, hvor faseforskellen er helt ubestemt, dvs. at en hvilken som helst værdi af faseforskellen i intervallet  $[0; 2\pi]$  er lige sandsynlig.

Vi vil nu vise, at man ved på forhånd at antage termodynamikkens 2. hovedsætning samt fluktuations-dissipationsteoremet, kan argumentere for, at der opstår dekoherens.

## 4.1 Karakteristik af måleapparatet

Vi vil her foretage en generalisering til systemer, hvor der er vilkårligt mange udfald af en måling. I foregående kapitel havde vi begrænset os til to mulige systemtilstande, nemlig  $|+\rangle$  og  $|-\rangle$ .

Vi karakteriserer måleapparatet ved en hamiltonoperator  $H_m$  ( $m$  for måleapparat) og kan opfatte måleapparatet som bestående af en masse



små tællere, der hver især repræsenterer et muligt udfald af en måling. Ved en måling registreres et måleresultat af en enkelt tæller; den der klikker — de andre påvirkes ikke. Målingen er en dissipativ proces, hvorfor vi i hamiltonoperatoren inkluderer en støjfunktion  $h_i(t)$ , hvor  $i$  refererer til den  $i$ 'te tæller.

$$H_m = \sum_i h_i(t) |i\rangle \langle i| = \sum_i h_i(t) P_i \quad (4.3)$$

$P_i$  er projektionsoperatoren for den  $i$ 'te tilstand. Når man lader den virke på en given egentilstand, vil den enten give egentilstanden selv eller 0; projektionsoperatoren har kun egenværdierne 0 og 1. Lader vi projektionsoperatoren virke på en tilstand, fås:

$$P_i |\psi\rangle = |i\rangle \langle i|\psi\rangle \quad (4.4)$$

Kigger man lidt nærmere på dette, ser man, at resultatet af at lade projektionsoperatoren virke netop er, at man får tilstanden  $|\psi\rangle$  projiceret ind på en egentilstand  $|i\rangle$  med en sandsynlighedsamplitude  $\langle i|\psi\rangle$ .

Tællerne antages at støje uafhængigt af hinanden, dvs. støjfunktionerne er statistisk uafhængige.

Vi ønsker nu at se på, hvordan vores system udvikler sig i tid, når man måler på det. Det svarer til, at vi lader  $H_m$  virke på  $|\psi_0\rangle$  og ser hvordan det går. I et ensemblesystem karakteriserer man en tilstand ved tæthedsoperatoren  $\rho$ , der til tiden 0 (jvf. forrige kapitel) er givet ved

$$\rho_0 = |\psi_0\rangle \langle \psi_0|$$

hvor  $|\psi_0\rangle$  er systemets tilstand til tiden 0.

Vi vil her argumentere for, at når man opskriver, hvorledes systemet udvikler sig tidsligt og midler over tiden, vil off-diagonalelementerne gå mod 0, når  $t \rightarrow \infty$ , dvs. tæthedsmatricen vil udvikle sig mod at blive diagonal.

Løser man den sædvanlige tidsafhængige schrödingerligning:

$$i\hbar \frac{\partial \psi(t)}{\partial t} = H\psi(t) \quad (4.5)$$

får man:

$$\psi(t) = \psi_0 e^{-\frac{i}{\hbar} H t} \quad (4.6)$$

Opskriver man derimod vores schrödingerligning, hvor  $H_m$  er tidsafhængig

$$i\hbar \frac{\partial \psi(t)}{\partial t} = H_m(t)\psi(t) \quad (4.7)$$

får man som løsning en tæthedsmatrix, hvor det  $ij$ 'te element er givet ved:

$$\rho_{ij}(t) = \langle i | e^{-\frac{i}{\hbar} \int_0^t H_m(t') dt'} \rho_0 e^{\frac{i}{\hbar} \int_0^t H_m(t') dt'} | j \rangle \quad (4.8)$$

Vi vil lige skitsere, hvordan man når frem til (4.8). Som det ses, er løsningen næsten identisk med løsningen til den sædvanlige tidsafhængige schrödingerligning, men der er alligevel forskel. Vi løser nu schrödingerligningen for at bestemme den tidslige udvikling af en *operator*, og som det ses, fremkommer der et integrale i eksponenten fordi  $H_m$ , som vi lige har opskrevet den i (4.3), er tidsafhængig.

Vi har nu med (4.8) et generelt udtryk for off-diagonalelementerne i vores tæthedsmatrix og skal tage matrixelementet af tre operatorer. Vi opskriver lige i generelle termer, hvordan man gør:

For to operatorer gælder at

$$\langle i | AB | j \rangle = \sum_k \langle i | A | k \rangle \langle k | B | j \rangle \quad (4.9)$$

fordi  $\sum_k |k\rangle \langle k|$  er enhedsoperatoren. Dette udvidet til tre operatorer giver

$$\langle i|ABC|j\rangle = \sum_k \langle i|A|k\rangle \langle k|BC|j\rangle \quad (4.10)$$

Hvis  $A$  er diagonal, vil kun elementet  $\langle i|A|i\rangle$  give et bidrag, derfor sættes  $k = i$  og

$$\langle i|A|i\rangle \langle i|BC|j\rangle = \langle i|A|i\rangle \sum_k \langle i|B|k\rangle \langle k|C|j\rangle \quad (4.11)$$

Hvis  $C$  ligeledes er diagonal, sættes  $k = j$ , og dermed er

$$\langle i|ABC|j\rangle = \quad (4.12)$$

$$\langle i|A|i\rangle \langle i|B|j\rangle \langle j|C|j\rangle \quad (4.13)$$

Da  $H_m(t)$  er hermitisk, kan vi derfor skrive (4.8) som

$$\rho_{ij}(t) = \langle i|e^{-\frac{i}{\hbar} \int_0^t H_m(t')dt'}|i\rangle \langle i|\rho_0|j\rangle \langle j|e^{\frac{i}{\hbar} \int_0^t H_m(t')dt'}|j\rangle \quad (4.14)$$

Hvis vi skal finde ud af, hvordan systemet udvikler sig, når målingen er sket, skal vi lade  $H_m(t)$  virke, da  $H_m(t)$  jo netop karakteriserede måleapparatet. Man får umiddelbart (eller ved at omskrive eksponentialfunktionen til en række og lade de enkelte led virke på tilstand  $|j\rangle$ ) at

$$e^{\frac{i}{\hbar} \int_0^t H_m(t')dt'}|j\rangle = e^{\frac{i}{\hbar} \int_0^t h_j(t')dt'}|j\rangle \quad (4.15)$$

og tilsvarende for  $|i\rangle$ . Ligning (4.14) kan – fordi vi nu ikke mere har operatorer, men tal og derfor kan "sætte udenfor" bra'erne og ket'erne – omskrives til

$$\rho_{ij}(t) = e^{-\frac{i}{\hbar} \int_0^t h_i(t')dt'} \langle i|\rho_0|j\rangle e^{\frac{i}{\hbar} \int_0^t h_j(t')dt'} \quad (4.16)$$

Vi har nu et udtryk for, hvordan systemet vil udvikle sig tidsligt, når der måles på det. Diagonalelementerne ( $i = j$ ) vil *ikke* ændres tidsligt, da summen af eksponenterne vil blive 0, når  $h_i(t) = h_j(t)$ . Det betyder, at sandsynligheden for egentilstandene for systemet ikke ændrer sig med tiden, og at vi har den samme sandsynlighed for at få et bestemt udfald. Derimod vil interaktionen med måleapparatet (tidsligt) betyde, at der opstår dekoherens — off-diagonalelementerne ( $i \neq j$ ) går mod 0. Det ses, når man midler over tiden og lader  $T \rightarrow \infty$ .

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\rho_0}{T} \int_0^T e^{-\frac{i}{\hbar} \int_0^t h_i(t') dt'} e^{\frac{i}{\hbar} \int_0^t h_j(t') dt'} dt = 0 \quad (4.17)$$

En kompleks eksponentialfunktion kan grafisk repræsenteres som en vektor, der drejer rundt på enhedscirklen. Når fasen bliver fuldstændig ubestemt (hvad den gør for  $T \rightarrow \infty$ ) betyder det, at sandsynligheden for at finde den et bestemt sted på enhedscirklen er den samme overalt, og derfor giver den midlet over tid 0. Dette skyldes, at differencen mellem to statistisk uafhængige størrelser, vil gå mod uendelig for  $T \rightarrow \infty$ .

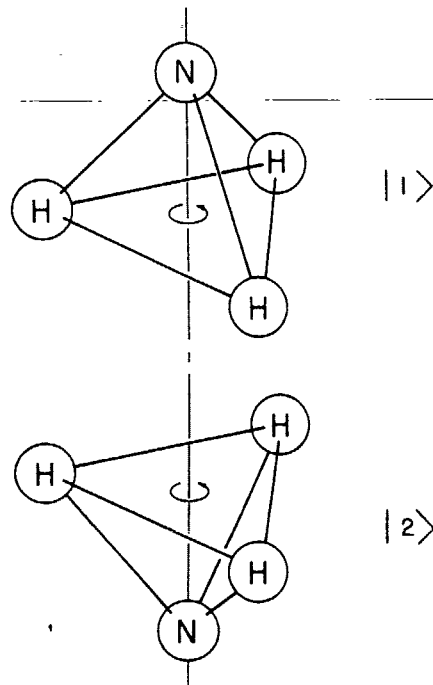
Vi har hermed argumenteret for, at off-diagonalelementerne i tæthedsoperatoren for et ensemblesystem vil gå mod 0 for  $T \rightarrow \infty$ , når man måler på det. Vi har derfor påvist, at et system tidsligt vil udvikle sig mod at udvise dekoherens — også selvom der er vilkårlig mange mulige udfald. Imidlertid har vi nu holdt os på et så generelt niveau, at vi kun kan sige noget om grænsetilfældet  $T \rightarrow \infty$ . Vi vil derfor i det næste afsnit regne på et konkret tilfælde for at finde ud af, hvor lang dekoherenstiden er.

## 4.2 Et godt eksempel - Ammoniakmolekylet

Der forekommer både tunnelering og dekoherens i ammoniakmolekylet, men een af de to effekter vil dominere, og det er den, som har den korteste "procestid". Hvis dekoherenstiden er mindre end tunneleringstiden, så er det umuligt at se en superponeret tilstand. Hvis derimod dekoherenstiden er større end tunneleringstiden, så vil det betyde, at man kan se (og evt. udnytte) tunneleringen.

Vi vil indledningsvis kort beskrive ammoniakmolekylet. Dernæst laver vi et overslag over hvor lang tid, det tager, før der opstår dekoherens, og endelig vil vi undersøge, hvor lang tunneleringstiden er.

Ammoniak eller  $NH_3$  har form som et tetraeder. Grundplanet udgøres af de 3 hydrogenatomer og toppen/bunden er nitrogenatomet, se figur (4.1). Det, at nitrogenatomet kan sidde på enten den ene side eller den anden side, vil vi benytte os af i denne sammenhæng. Da molekylet roterer, er der forskel på, om nitrogenatomet sidder på den ene eller anden side. Der er ikke tale om, at molekylet blot er vendt 180 grader fra den ene tilstand i forhold til den anden. Man kan også sige, at den ene tilstand i forhold til den anden svarer til en spejling i hydrogenplanet.



**Figur 4.1:** Der er to mulige positioner for nitrogenatomet i ammoniakmolekylet; på den ene eller på den anden side af hydrogenplanet. Figuren er fra [Feynman, 1965].

Ammoniakmolekylet har som andre molekyler et uendelig antal tilstande. De kan dreje om alle mulige akser, flytte sig i alle mulige retninger, vibrere, osv. Men uanset hvor mange mulige tilstande der vil være, så vil hver tilstand kunne findes i både en "op" og en "ned"

version. Vi diskuterer derfor  $NH_3$  som var det et system af kun to mulige tilstande.

Disse to tilstande kan identificeres til at være egentilstande for dipolmomentet. Det kan man undersøge ved at forstyrre ammoniakmolekylet fx ved at lægge et elektrisk felt over, så man herved vekselvirker med dets dipolmoment.

### 4.3 Dekoherenstid

Et molekyle i en ammoniakgas vil vekselvirke med de andre molekyler i gassen, fordi ammoniakmolekylerne hver især har et dipolmoment. Det betyder, at vores molekyle kan "mærke" de andre molekyler pga. dipolernes vekselvirkning. Det er et dissipativt system, og derfor forekommer der støj i systemet, jvf. afsnit 4.1.

Dekoherenstiden er den tid, det tager tilstande, der er korrelerede til et givent tidspunkt ( $t = 0$ ) at komme ud af fase, altså blive ukorrelerede. Vi antager jo at ammoniakmolekylet har to egentilstande for dipolmomentet med tilhørende sandsynlighedsamplituder  $c_k = |c_k|e^{i\phi_k}$ , hvor  $e^{i\phi_k}$  er fasen for den  $k$ 'te egentilstand.

Vi regner i denne overslagsregning på en ammoniakgas ved normalt tryk (1 bar) og stuetemperatur (298 K), hvorved vi kan tillade os at betragte den som en idealgas.

Først vil vi finde gennemsnitsafstanden  $l$  mellem molekylerne i gassen:

$$l = \left( \frac{V_m}{N_A} \right)^{\frac{1}{3}} \quad (4.18)$$

hvor  $V_m$  er det molære volumen og  $N_A$  er Advogadros konstant.

For at finde den frie flyvetid  $\tau = \frac{l}{v_{th}}$  må vi først finde den termiske hastighed (eller molekylets middeldkvadrathastighed)  $v_{th}$ :

$$\frac{1}{2}mv_{th}^2 = \frac{3}{2}k_B T \Rightarrow v_{th} = \sqrt{\frac{3k_B T}{m}} \quad (4.19)$$

hvor  $m$  er massen af molekylet,  $k_B$  Boltzmanns konstant og  $T$  er temperaturen (i kelvin). Vi kan nu finde

$$\tau = \frac{l}{v_{th}} = \frac{l}{\sqrt{\frac{3k_B T}{m}}} = \sqrt{\frac{l^2 m}{3k_B T}} \quad (4.20)$$

som ca. giver  $\tau = 5 \cdot 10^{-12}$  s.

Hvert ammoniakmolekyle har et dipolmoment  $\mu$  (på  $4,90 \cdot 10^{-30}$  Cm). Vi kan altså udregne størrelsesordenen af den potentielle energi mellem to molekyler. Den er givet ved:

$$V_{pot} = \frac{\mu_1 \mu_2}{4\pi \epsilon_0 l^3} \quad (4.21)$$

hvor  $\epsilon_0$  er vacuumpermittiviteten.

Vi kan nu, udfra hvad vi har udregnet i afsnit 4.1, udregne fasegevinsten  $Q$  pr gang molekylet mærker et dipolmoment. Vi kan sammenligne hver dipolvekselvirkning med et spil. Når der sker flere vekselvirkninger efter hinanden svarer det til, at vi foretager en række af spil. Hvert enkelt spil giver en gevinst (eller tab) svarende til fasegevinsten  $\pm Q$ .

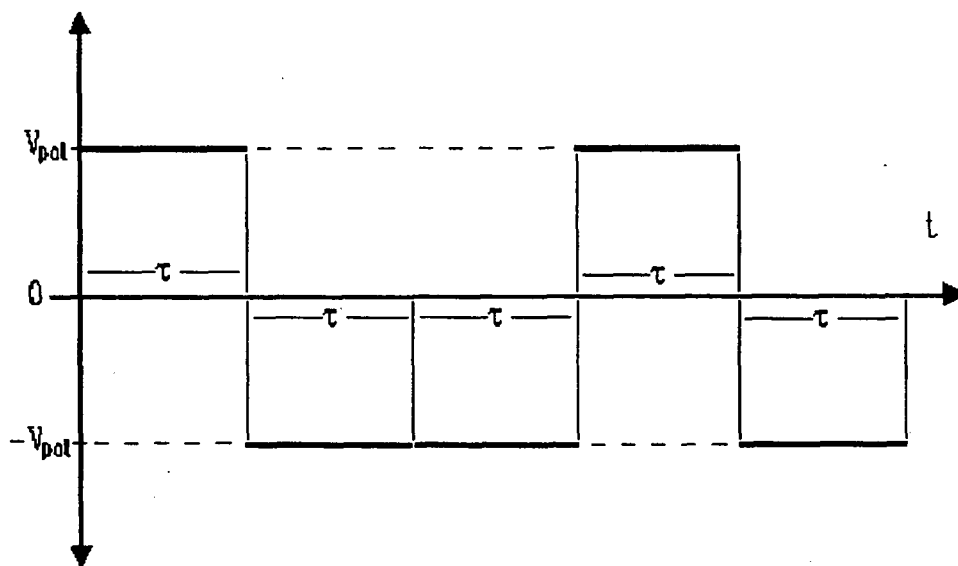
Støjfunktionen indgår i  $H_m(t)$  jvf. ligning (4.3), og den tidslige udvikling af systemet beskrives af schrödingerligningen. Støjen vil derfor bevirke, at sandsynlighedsamplituderne ændres. Støjleddet i  $H_m$  var givet ved:

$$\frac{1}{\hbar} \int_0^t h_i(t') dt' \quad (4.22)$$

I dette tilfælde udgøres støjen jo af dipolerne, da det er disse, der vekselvirker — altså vores udtryk for  $V_{pot}$ , som antages at have form som en stepfunktion (se figur 4.2), således at løsningen til (4.22) for tidsrummet  $\tau$  bliver

$$Q = \pm \frac{V_{pot} \cdot \tau}{\hbar} = \pm \frac{\mu^2 \sqrt{m}}{\hbar 4\pi \epsilon_0 l^2 \sqrt{3k_B T}} \quad (4.23)$$

hvilket giver  $Q = \pm 0,26$ .



**Figur 4.2:** Grafen illustrerer en række af dipolmomentvekselvirkninger hver af varigheden  $\tau$ .

Vi kan dermed finde ud af, hvor mange spil, der skal spilles eller gange, der skal ske vekselvirkning (her kaldet  $N$ ), før faseforskellen er fuldstændig ubestemt (svarende til at spredningen er  $2\pi$ ).

Variansen er givet ved

$$\text{Var}(Q) = N(\langle Q^2 \rangle - \langle Q \rangle^2) \quad (4.24)$$

og spredningen er da givet ved

$$\sigma_Q = \sqrt{N(\langle Q^2 \rangle - \langle Q \rangle^2)} \quad (4.25)$$

Dette er ikke helt svarende til en almindelig binomialfordeling, som fx et møntkast, hvor udfaldet er plat eller krone, hver med sandsynlighed  $1/2$ , fordi man i et sådan tilfælde tildeler de to udfald henholdsvis værdierne 1 og 0. Det er ikke tilfældet her, da vi har udfaldene  $+Q$  og  $-Q$  (svarende til 1 og  $-1$ ). Vi får da:

$$\langle Q \rangle = 0, \quad \langle Q^2 \rangle = 1 \quad (4.26)$$



og dermed ved indsættelse:

$$\sigma_Q = \sqrt{N(\langle Q^2 \rangle - \langle Q \rangle^2)} = \sqrt{N} \quad (4.27)$$

Nu kan vi udregne, hvor mange gange der skal ske vekselvirkning, før faseforskellen er fuldstændig ubestemt:

$$\sqrt{N} \cdot Q = 2\pi \Rightarrow N = \left(\frac{2\pi}{Q}\right)^2 \quad (4.28)$$

hvilket giver  $N = 589$ .

Vi kan ved indsættelse finde den tid, det tager, før der opstår dekoherens, idet vi nu både kender antallet af gange der skal ske vekselvirkning og den tid der går mellem hver vekselvirkning:

$$T_{deko} = N \cdot \tau = 3 \cdot 10^{-9} \text{ s} \quad (4.29)$$

## 4.4 Tunneleringstid

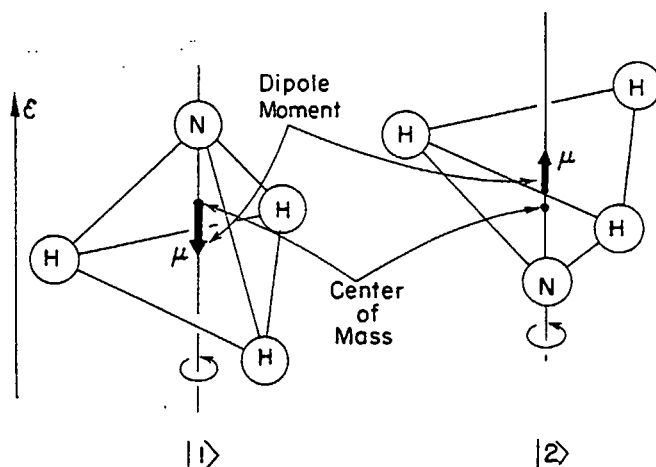
Vi vil i dette afsnit<sup>2</sup> finde tunneleringstiden for ammoniakmolekylet, dvs. hvor lang tid det vil tage nitrogenatomet at tunnelere gennem hydrogenplanet, se figur (4.3), altså fra den ene side til den anden.

Hvis vi holder fast ved, at vi kan beskrive ammoniakmolekylet som værende et system af to mulige tilstande, kan vi opskrive bølgefunktionen for det som

$$|\psi\rangle = \sum_n c_n |n\rangle = c_1 |1\rangle + c_2 |2\rangle \quad (4.30)$$

Selvom molekylet til et tidspunkt er i tilstand  $|1\rangle$ , kan det til et senere tidspunkt være i enten den ene eller den anden tilstand eller i en superposition af  $|1\rangle$  og  $|2\rangle$  alt efter, hvor langt tidsrummet er. Da  $c_1$  og  $c_2$  er tidsafhængige, skal vi altså løse ligningssystemet

<sup>2</sup>Baseret på [Feynman, 1965], kapitel 8 og 9.



**Figur 4.3:** De to tilstande af ammoniakmolekylet, hvor de elektriske dipolmoment er indtegnet. Figuren er fra [Feynman, 1965].

$$i\hbar \begin{pmatrix} \frac{dc_1}{dt} \\ \frac{dc_2}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} H_{11} & H_{12} \\ H_{21} & H_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} \quad (4.31)$$

hvor  $H_{ij}$  er hamiltonmatricen, som er uafhængig af tiden. Vi kan ikke løse dette system direkte, men må gå lidt omveje. Vi kan nemt løse ligningssystemet og finde  $c_1$  og  $c_2$ , hvis  $H_{12}$  og  $H_{21}$  er nul. Det ville være tilfældet, hvis det var umuligt at gå fra den ene tilstand til den anden, når systemet først var i en af dem. Vi regner (af symmetri Grunde) med  $H_{11} = H_{22}$ , for hvorfor skulle den ene tilstand være mere sandsynlig end den anden. Lad os derfor kalde dem begge for  $E_0$ . Nu er det jo ikke tilfældet at  $H_{12}$  og  $H_{21}$  er nul, men vi ved, at de i alle tilfælde må have samme størrelse, da hamiltonmatricen er hermitisk. Vi kalder dem da  $-A$ . Vi har nu et ligningssystem, der ser således ud:

$$i\hbar \begin{pmatrix} \frac{dc_1}{dt} \\ \frac{dc_2}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_0 & -A \\ -A & E_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} \quad (4.32)$$

Disse ligninger er simple nok og kan godt løses. Den generelle løsningsform fra den lineære algebra er

$$\begin{pmatrix} c_1(t) \\ c_2(t) \end{pmatrix} = S \begin{pmatrix} k_1 e^{\lambda_1 t} \\ k_2 e^{\lambda_2 t} \end{pmatrix} \quad (4.33)$$

hvor  $S$  er matricen bestående af egenvektorerne,  $\lambda_1$  og  $\lambda_2$  er de tilhørende egenverdier og  $k_1$  og  $k_2$  er konstanter.

Vi får:

$$c_1(t) = \frac{k_1}{2} e^{-\left(\frac{i}{\hbar}\right)(E_0-A)t} + \frac{k_2}{2} e^{-\left(\frac{i}{\hbar}\right)(E_0+A)t} \quad (4.34)$$

og

$$c_2(t) = \frac{k_1}{2} e^{-\left(\frac{i}{\hbar}\right)(E_0-A)t} - \frac{k_2}{2} e^{-\left(\frac{i}{\hbar}\right)(E_0+A)t} \quad (4.35)$$

Konstanterne bestemmes således, at vi får nogle passende startbetingelser.

Hvis fx  $k_2$  er nul, så vil sandsynlighedsamplituden i begge tilfælde svinge med samme frekvens  $\omega = (E_0 - A)/\hbar$ . Det betyder, at systemet er i en tilstand med en bestemt energi — i dette tilfælde  $(E_0 - A)$ . Der er altså en stationær tilstand med denne energi, hvor de to amplituder  $c_1$  og  $c_2$  er lige store.

En anden stationær tilstand er mulig; nemlig hvis  $k_1$  er nul. Både  $c_1$  og  $c_2$  vil da have frekvensen  $\omega = (E_0 + A)/\hbar$ . De to amplituder er lige store men har modsat fortegn. Der er kun disse to tilstande med bestemt energi.

Vi kan derfor sige, at fordi der er en chance for, at nitrogenatomet kan komme fra den ene side af hydrogenplanet til den anden, altså tunnelere, så er energien af molekylet ikke blot ét niveau  $E_0$  (som man måske ville forvente), men to mulige energiniveauer  $(E_0 - A)$  og  $(E_0 + A)$ . Derfor vil alle mulige tilstande af molekylet — uanset energiniveauet — være opdelt i to niveauer.

Vi vil nu konkret bestemme  $k_1$  og  $k_2$ . Hvis molekylet til  $t = 0$  er i tilstand  $|1\rangle$ , så haves:

$$c_1(0) = \frac{k_1 + k_2}{2} = 1 \quad (4.36)$$

$$c_2(0) = \frac{k_1 - k_2}{2} = 0 \quad (4.37)$$

og vi får  $k_1 = k_2 = 1$ .

Vi kan således omskrive løsningen til:

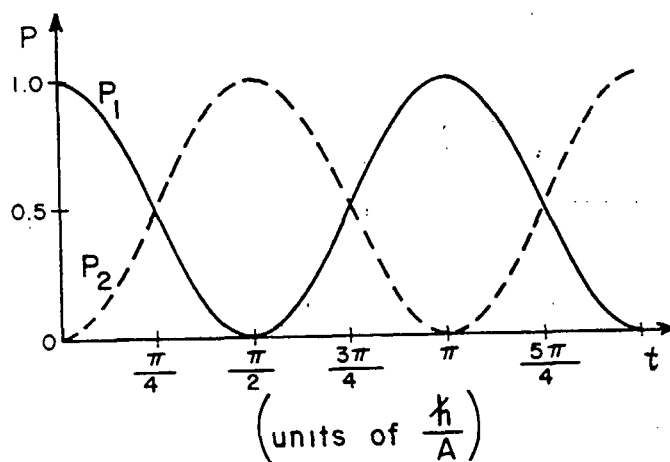
$$c_1(t) = e^{-\left(\frac{i}{\hbar}\right)E_0 t} \cos\left(\frac{At}{\hbar}\right) \quad (4.38)$$

$$c_2(t) = ie^{-\left(\frac{i}{\hbar}\right)E_0 t} \sin\left(\frac{At}{\hbar}\right) \quad (4.39)$$

Vi kan nu fx bestemme sandsynligheden for til tiden  $t$  at finde molekylet i tilstand  $|2\rangle$  ved

$$|c_2(t)|^2 = \sin^2\left(\frac{At}{\hbar}\right) \quad (4.40)$$

Vi kan se, hvordan de to sandsynligheder varierer på figur 4.4.



**Figur 4.4:**  $P_1$  er sandsynligheden for at finde ammoniakmolekylet i tilstand  $|1\rangle$  og  $P_2$  er sandsynligheden for at finde det i tilstand  $|2\rangle$ . Figuren er fra [Feynman, 1965].

Det, vi er interesserede i, er, hvor lang tid det tager for molekylet at tunnelere. Man kan ikke direkte udregne energiforskellen mellem de to niveauer (det er for kompliceret). Da det øvre energiniveau kan beskrives ved  $E_0 + A$  og det nedre ved  $E_0 - A$ , så må energiforskellen

mellem de to niveauer være  $2A$ . Den er eksperimentelt bestemt til  $1 \cdot 10^{-4}$  eV. Vi har så

$$2A = \hbar\omega = h\nu = \frac{h}{T_{\text{tunn}}} \Rightarrow T_{\text{tunn}} = \frac{h}{2A} \quad (4.41)$$

Dette giver en tunnelerings-tid på  $T_{\text{tunn}} = 4 \cdot 10^{-11}$  s.

Der er altså en faktor hundrede til forskel på tunnelerings-tiden og dekoherens-tiden. Det er ikke overraskende, at der er en forskel på de to tider, og at tunnelerings-tiden er den korteste, for havde vi haft en dekoherens-tid der var kortere end tunnelerings-tiden ville det jo være umuligt at lave en ammoniakmaser<sup>3</sup>.

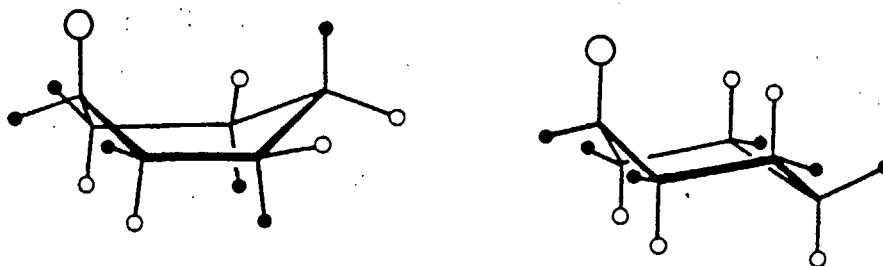
Vi vil til slut prøve at modellere ammoniakmolekylet med en dobbelt-potentialbrønd, da vi vil undersøge, hvor store parametre vi får, hvis vi skal have en tunnelerings-tid i samme størrelsesorden som dekoherens-tiden.

## 4.5 Dobbeltpotentialbrønden

I sidste afsnit lavede vi nogle overslagsregninger på ammoniakmolekylet og konstaterede, at tunnelering dominerer over dekoherens, fordi tunnelerings-tiden er kortere end dekoherens-tiden og det derfor er tunneleringen, man kan observere. Det er ikke utænkeligt, at andre ammoniaklignende molekyler har en tunnelerings-tid, der er længere end dekoherens-tiden. Med "ammoniaklignende" vil vi forstå molekyler, der ligesom ammoniak kan karakteriseres som systemer med to tilstande. Et eksempel er cyclohexan, som man både kan finde i en "bådform" og en "stoleform".

Hvilken betydning har eksempelvis afstanden mellem atomerne i molekylet? Det rækker de overslagsregninger, vi i sidste afsnit benyttede

<sup>3</sup>I maseren (Microwave Amplification by Stimulated Emission of Radiation) udnytter man netop denne tunnelering. Man lægger et elektrisk felt over ammoniakgassen for at skille molekyler med de to tilstande fra hinanden og anvender så kun dem med den højeste energi. Disse sendes så ind i en kasse med et varierende elektrisk felt, som svinger med en bestemt frekvens. Derved overgår molekylerne til den lave energi tilstand og leverer elektrisk energi til kassen. Vi får altså på denne måde lavet fotoner med en meget veldefineret bølglængde.



**Figur 4.5:** Cyclohexan i bådform og stoleform [Atkins, 1990], s. 554.

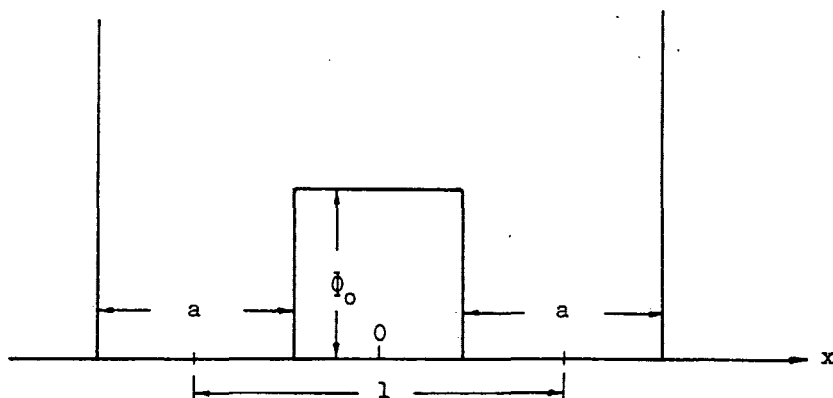
til at estimere tunneleringstiden, ikke til at belyse. Vi vil i dette afsnit opstille en model: Dobbelpotentialbrønden, der kan benyttes til at beregne tunneleringstiden. Vi viser, at man ved at skrue på parametrene i modellen kan få tunneleringstider, der er længere end dekoherenstiden.

Normalt vil man i een dimension modellere det potential nitrogenatomet i ammoniakmolekylet befinder sig i, som tegningen til venstre på figur 4:6 viser. For at kunne regne på ammoniakmolekylet, antager vi imidlertid, at vi kan modellere potentialet med en dobbelpotentialbrønd, som vist til højre på figuren.



**Figur 4.6:** Figuren viser det potential nitrogenatomet i ammoniakmolekylet antages at befinde sig i hhv. i det potential, man normalt modellerer ammoniakmolekylet med, og dobbelpotentialbrønden.

Modellen af dobbelpotentialbrønden er fra Mortens Scharff's bog Elementær kvantemekanik [Scharff, 1977]. Figur 4.7 viser dobbelpotentialbrønden.



**Figur 4.7:** x-aksen angiver positionen af nitrogenatomet i forhold til hydrogenplanet og y-aksen er størrelsen af det potential, nitrogenatomet befinder sig i. Afstanden mellem de to positioner nitrogenatomet befinder sig i i de to tilstande kaldes  $l$ .

Tunneleringstiden for nitrogenatomet kan vises at være givet ved

$$t = \frac{\pi \hbar}{E_- - E_+} \quad (4.42)$$

$E_-$  og  $E_+$  er energierne af de to grundtilstandsenergyniveauer. Disse energier svarer til  $(E_0 - A)$  og  $(E_0 + A)$  i afsnit 4.4.

For at beregne tunneleringstiden eksakt, skal vi kende størrelserne af  $E_-$  og  $E_+$ , dvs. vi skal bestemme energyniveauerne i dobbeltpotentialbrønden. Dette gøres analogt med andre typer potentialer: Man opstiller og løser schrödingerligningen for de forskellige områder af brønden (hvor der er konstant potential) og udnytter herefter randbetingelserne til at opstille ligninger, som energyniveauerne kan bestemmes ud fra.

Først opstiller man den tidsuafhængige schrödingerligning i een dimension:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 u(x)}{\partial x^2} + u(x)V(x) = Eu(x) \quad (4.43)$$

$u(x)$  er sandsynlighedsamplituden for at finde nitrogenatomet med massen  $m$  i en given position i forhold til planet,  $V(x)$  er potentialet i et område af brønden og  $E$  er energien af nitrogenatomet.

Der er forskellige potentialer i forskellige områder af brønden. I bunden af brønden er det 0, barrierehøjden er  $\Phi_0$  og endelig er brønden udadtil afgrænset af uendelig høje potentialer. Afstanden mellem de to yderpositioner af nitrogenatomet er  $l$ , og  $a$  er bredden af brøndene.

Potentialerne i brønden opskrives som:

$$V(x) = \Phi_0 \text{ for } |x| < \frac{l}{2} - \frac{a}{2} \quad (4.44)$$

$$V(x) = 0 \text{ for } \frac{l}{2} - \frac{a}{2} < |x| < \frac{l}{2} + \frac{a}{2} \quad (4.45)$$

$$V(x) = \infty \text{ for } |x| > \frac{l}{2} + \frac{a}{2} \quad (4.46)$$

Når  $V(x) = \infty$ , er  $u(x) = 0$ .

For de to andre potentialer skal man løse differentialligningerne:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 u(x)}{\partial x^2} + u(x)\Phi_0 = Eu(x) \quad (4.47)$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 u(x)}{\partial x^2} = Eu(x) \quad (4.48)$$

Da alt andet end  $u(x)$  er konstanter, indføres for overskuelighedens skyld:

$$\beta = \sqrt{\frac{2m(\Phi_0 - E)}{\hbar^2}} \quad (4.49)$$

$$k = \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}} \quad (4.50)$$

hvorved ligningerne får dette udseende

$$u''_{brønd}(x) = -k^2 u(x)_{brønd} \quad (4.51)$$

$$u''_{barriere}(x) = \beta^2 u_{barriere}(x) \quad (4.52)$$



Dette er sædvanlige 2.ordens differentialligninger. Den reelle løsning til (4.51) er givet ved:

$$u_{brønd}(x) = C_1 \sin(kx) + C_2 \cos(kx) \quad (4.53)$$

og den reelle løsning til (4.52) er givet ved

$$u_{barriere}(x) = Be^{\beta x} + Ce^{-\beta x} \quad (4.54)$$

Løsninger til (4.51) skal opfylde randbetingelsen  $u(x) = 0$  for  $x = \frac{l}{2} + \frac{a}{2}$  og for  $x = -\frac{l}{2} - \frac{a}{2}$ .

Hvis man indsætter fås to ligninger, der kun kan være opfyldt samtidigt, hvis  $C_2 = 0$ . Dermed er der kun sin-delen af løsningen tilbage, hvis argument skal være 0 i henholdsvis  $x = \frac{l}{2} + \frac{a}{2}$  og  $x = -\frac{l}{2} - \frac{a}{2}$ . Egenfunktionerne i brøndene må være givet ved

$$u(x) = A \sin \left[ k \left( x + \frac{a}{2} + \frac{l}{2} \right) \right] \quad -\frac{l+a}{2} < x < \frac{a-l}{2} \quad (4.55)$$

$$u(x) = D \sin \left[ k \left( x - \frac{a}{2} - \frac{l}{2} \right) \right] \quad \frac{l-a}{2} < x < \frac{l+a}{2} \quad (4.56)$$

Egenfunktionen i potentialbarrieren er givet ved

$$u(x) = Be^{\beta x} + Ce^{-\beta x} \quad |x| < \frac{l-a}{2} \quad (4.57)$$

Vi har udregnet egenfunktionerne, men det var energispektret, vi skulle bestemme. Som det ses, indgår energierne i konstanterne  $k$  og  $\beta$ . Vi kan opnå at få betingelser på værdierne af  $k$  og  $\beta$  (og dermed energierne) ved yderligere at udnytte randbetingelserne. Hvis vi forlanger, at den samlede løsning skal være kontinuert, skal løsningerne i bunden af brøndene – bestemt ved (4.55) og (4.56) – blive 0 ved yderkanten af brøndene. Men løsningerne skal også være kontinuerte i  $x = \frac{l}{2} - \frac{a}{2}$  og  $x = -\frac{l}{2} + \frac{a}{2}$ , og dette gælder også deres afledede. Herved fås fire

ligninger og "ved en smule regninger" får man faktisk betingelser på  $k$  og  $\beta$ , som vi kan bruge til at bestemme energiniveauerne ud fra.

$$\frac{k}{\beta} \cot(ka) = -\tanh \left[ \beta \left( \frac{l}{2} - \frac{a}{2} \right) \right] \quad (4.58)$$

$$\frac{k}{\beta} \cot(ka) = -\coth \left[ \beta \left( \frac{l}{2} - \frac{a}{2} \right) \right] \quad (4.59)$$

Energierne indgår i udtrykkene for  $k$  og  $\beta$ . Ved at indsætte værdier for  $l$ ,  $a$  og  $\Phi_0$  kan man således bestemme energierne, dog kun ved at løse ligningerne numerisk. Ligning (4.58) giver en energierne  $E_+$ , mens (4.59) giver energierne  $E_-$ , der indgik i formlen for tunneleringstiden.

Når  $l$  går mod uendelig får man identiske energiegenværdier, bestemt ved:

$$k \cot(ka) = -\beta \quad (4.60)$$

hvilket ses af at  $\tanh(x) \rightarrow 1$  for  $x \rightarrow \infty$  og  $\coth(x) \rightarrow 1$  for  $x \rightarrow \infty$ . Man får det samme resultat, hvis man lader  $\Phi_0$  gå mod uendelig. Der vil altså ske det, at differencen mellem parrene af energiniveauer går mod 0, og dermed går tunneleringstiden mod uendelig.

Der er ikke særlig meget information i grænsetilfældet, udover at vi kan forvente at få meget lange tunneleringstider ved passende valg af parametre. Vi vil derfor i det følgende løse (4.58) og (4.59) for forskellige valg af parametrene  $l$ ,  $a$  og  $\Phi_0$ . Vi ønsker et sæt af parametre, der giver en tunneleringstid af samme størrelsesorden som dekoherenstiden på  $3 \cdot 10^{-9}$  s.

Vi omskriver først (4.58) og (4.59):

$$\frac{k}{\beta} \cot(ka) + \tanh \left[ \beta \left( \frac{l}{2} - \frac{a}{2} \right) \right] = 0 \quad (4.61)$$

$$\frac{k}{\beta} \cot(ka) + \coth \left[ \beta \left( \frac{l}{2} - \frac{a}{2} \right) \right] = 0 \quad (4.62)$$

$\beta a$  kan udtrykkes ved  $ka$  som

$$\beta a = \sqrt{\frac{2m\Phi_0 a^2}{\hbar^2} - (ka)^2} \quad (4.63)$$

Indføres

$$x = ka \quad (4.64)$$

$$c = \frac{2ma^2\phi_0}{\hbar^2} \quad (4.65)$$

$$d = \frac{1}{2} \left( \frac{l}{a} - 1 \right) \quad (4.66)$$

kan vi omskrive (4.58) og (4.59) til

$$\frac{x}{\sqrt{c - x^2}} \cot(x) + \tanh(d\sqrt{c - x^2}) = 0 \quad (4.67)$$

$$\frac{x}{\sqrt{c - x^2}} \cot(x) + \coth(d\sqrt{c - x^2}) = 0 \quad (4.68)$$

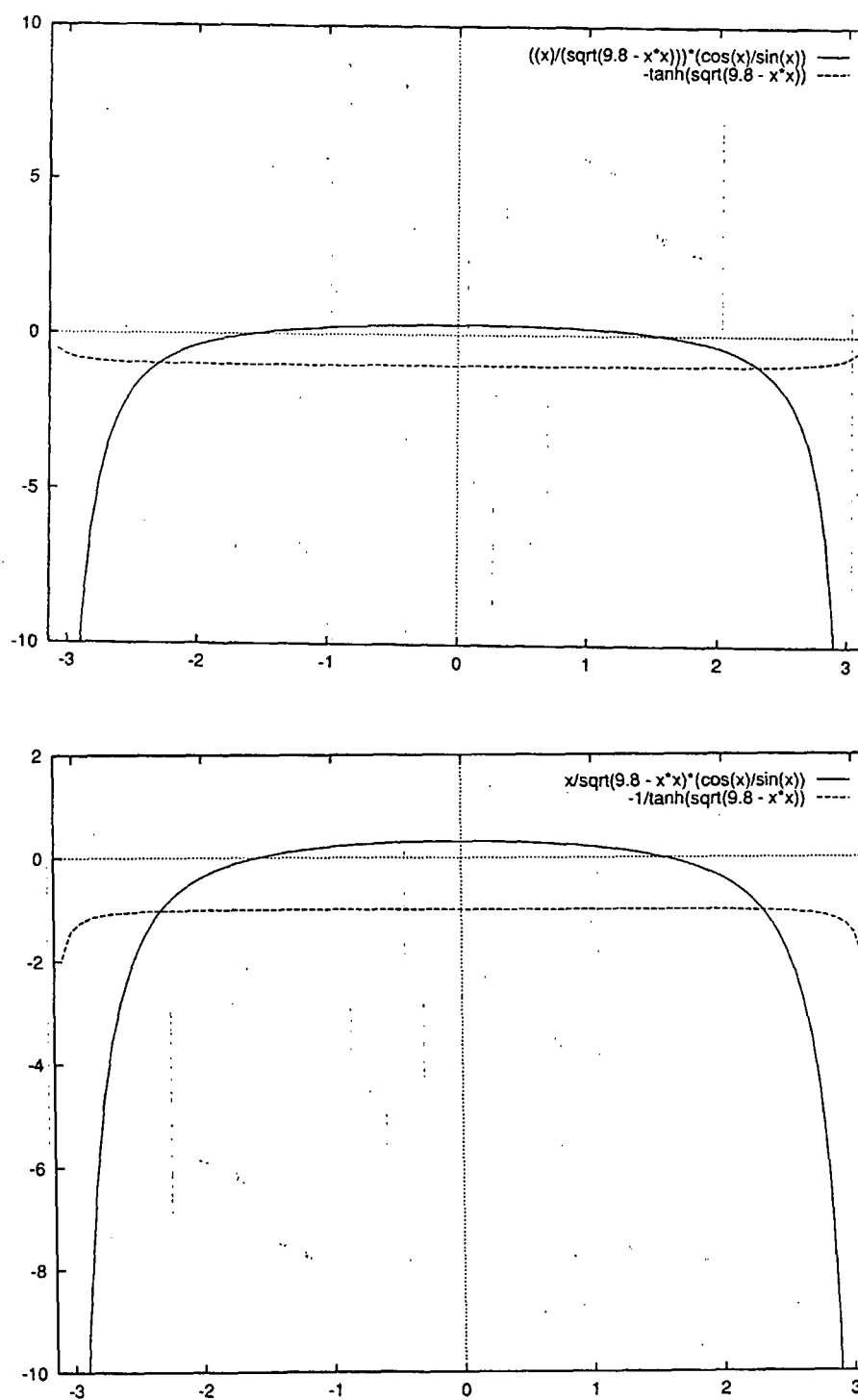
Vi finder nulpunkter og regner derefter om til energier.

Energidifferencen kan findes som

$$\Delta E = \frac{\hbar^2}{2ma^2} (x_-^2 - x_+^2) \quad (4.69)$$

hvor  $x_+$  er løsning til (4.67) og  $x_-$  er løsning til (4.68). Faktoren  $\frac{\hbar^2}{2m}$  er i størrelsesorden  $8 \cdot 10^{-40} \text{ Jm}^2$ .

Tunneleringsiden beregnes ud fra differencen i grundtilstandsenergier, og det er derfor grundtilstandsenergierne, vi ønsker at bestemme. Vi skal altså finde de mindste  $x > 0$ , der giver en løsning til (4.67) og (4.68). Da nulpunktssøgningen involverer et gæt på 0-punktet, skal vi finde det interval, hvor det mindste positive  $x$  optræder. Figur 4.8 viser funktionerne i intervallet  $[-\pi; \pi]$ .



**Figur 4.8:** Figuren viser graferne for funktionerne i dobbeltbrønden.

Hvis vi ser grafisk på problemet, kan vi formulere det som at vi skal finde skæringspunkter mellem

$$\frac{x}{\sqrt{c - x^2}} \cot(x) \quad (4.70)$$

og

$$- \tanh \left( d\sqrt{c - x^2} \right) \quad (4.71)$$

samt

$$\frac{x}{\sqrt{c - x^2}} \cot(x) \quad (4.72)$$

og

$$- \coth \left( d\sqrt{c - x^2} \right) \quad (4.73)$$

Det første skæringspunkt for  $x > 0$  må være i intervallet  $[\frac{\pi}{2}; \pi]$ . Funktionen indeholdende  $\cot(x)$ -leddet vil i dette interval altid variere mellem 0 og  $-\infty$ , mens funktionerne  $-\tanh(d\sqrt{c - x^2})$  og  $-\coth(d\sqrt{c - x^2})$  vil være negative i dette interval, og derfor må der være et skæringspunkt.

Herudover er der nogle betingelser på valg af konstanter. For at  $\beta a$  skal være reel, skal der gælde at

$$x < \sqrt{\frac{2m\Phi_0 a^2}{\hbar^2}} \quad (4.74)$$

og derudover skal  $a < l$ , da brøndene ellers "smelter sammen".

Vi vælger nu parametre. Fordi vi i første omgang modellerer et ammoniakmolekyle vælges  $m$  til 17 u. Vi vælger desuden  $a$  til at være 1 Å. Tilbage er så parametrene  $\Phi_0$  og  $l$  at variere på. Som udgangspunkt vil vi gerne kunne regne med ammoniakmolekylet. Vi kender imidlertid ikke  $\Phi_0$  og  $l$ . Men da hydrogenbindinger er ca. 1 Å lange og molekylet har en tetraæderstruktur, regner vi med, at  $l$  er i størrelsesorden et par Å. Vi starter med at vælge  $l$  til 2,6 Å og varierer på  $\Phi_0$  og finder  $\Phi_0$  for et ammoniakmolekyle. Bagefter holder vi  $\Phi_0$  fast på 1 eV, mens vi varierer på  $l$ .

Figur 4.9 viser tunneleringstiderne for forskelligt valg af parametre. Skemaerne viser tunneleringstiderne i dobbeltbrønden.  $x+$  er løsningen til (4.67) og  $x-$  løsningen til (4.68) og er fundet ved at løse ligningerne numerisk i programmet Mat-lab.

Når man varierer  $\Phi_0$  viser det sig, at potentialbarrieren i brønden skal være i størrelsesorden 3 eV, for at man når op på tunneleringstiden for ammoniakmolekylet. Skal man op på dekoherenstiden, skal man op på ca. 5 eV. Ammoniaklignende molekyler, skal altså have en potentialbarriere, der er ca. 2 gange højere end den, der er i ammoniak, før der vil optræde dekoherens.

Varierer man på  $l$  ses det, at man skal op på ca 6 Å, før man når op på dekoherenstiden, dvs.  $l$  skal øges en faktor 3 før dekoherenstiden er kortere end tunneleringstiden.

## Variation af barrierehøjde, $f$

Faste parametre  $a = 1 \text{ \AA}$ ,  $m = 17 \text{ u}$ ,  $l = 2,6 \text{ \AA}$

		x+	x-	diff. kvad	diff/a	energiddiff	tunnel.tid
$f = 0,5 \text{ eV}$	$c = 10$	2,2975	2,3413	2,0E-01	2,0E+19	1,6E-20	2,0E-14
$f = 1 \text{ eV}$	$c = 20$	2,5361	2,5401	2,0E-02	2,0E+18	1,6E-21	2,0E-13
$f = 2 \text{ eV}$	$c = 40$	2,7004	2,7005	5,4E-04	5,4E+16	4,3E-23	7,7E-12
$f = 2,1 \text{ eV}$	$c = 42$	2,7101	2,7102	5,4E-04	5,4E+16	4,3E-23	7,6E-12
$f = 2,2 \text{ eV}$	$c = 44$	2,719169	2,71925	4,4E-04	4,4E+16	3,5E-23	9,4E-12
$f = 2,3 \text{ eV}$	$c = 46$	2,727558	2,727666	5,9E-04	5,9E+16	4,7E-23	7,0E-12
$f = 3 \text{ eV}$	$c = 60$	2,775169	2,77518	6,2E-05	6,2E+15	4,9E-24	6,7E-11
$f = 3,9 \text{ eV}$	$c = 78$	2,816962	2,816963	9,3E-06	9,3E+14	7,4E-25	4,5E-10
$f = 4 \text{ eV}$	$c = 80$	2,820746	2,820748	7,6E-06	7,6E+14	6,1E-25	5,4E-10
$f = 4,1 \text{ eV}$	$c = 82$	2,824397	2,824398	6,3E-06	6,3E+14	5,0E-25	6,6E-10
$f = 4,2$	$c = 84$	2,827922	2,827923	5,2E-06	5,2E+14	4,2E-25	7,9E-10
$f = 5 \text{ eV}$	$c = 100$	2,852342	2,852342	1,2E-06	1,2E+14	9,9E-26	3,4E-09
$f = 6 \text{ eV}$	$c = 120$	2,875943	2,875943	2,4E-07	2,4E+13	1,9E-26	1,7E-08

## Variation af $l$

Faste parametre, potentialbarriere  $1 \text{ eV}$ ,  $m = 17 \text{ u}$ ,  $c = 20$

$l \text{ [Å]}$	$d$	x+	x-	diff.kvadr	diff/a	energiddiff	tun.tid
$l = 3,4$	$d = 1,2$	2,538	2,5381	5,1E-04	5,1E+16	4,1E-23	8,2E-12
$l = 3,6$	$d = 1,3$	2,538035	2,538137	5,2E-04	5,2E+16	4,2E-23	8,0E-12
$l = 3,8$	$d = 1,4$	2,538061	2,53811	2,5E-04	2,5E+16	2,0E-23	1,7E-11
$l = 5$	$d = 2$	2,538086	2,538086	3,0E-06	3,0E+14	2,4E-25	1,4E-09
$l = 6$	$d = 2,5$	2,538086	2,538086	1,5E-06	1,5E+14	1,2E-25	2,7E-09
$l = 6,2$	$d = 2,6$	2,538086	2,538086	3,6E-08	3,6E+12	2,9E-27	1,1E-07
$l = 6,4$	$d = 2,7$	2,538086	2,538086	1,7E-08	1,7E+12	1,4E-27	2,4E-07
$l = 6,6$	$d = 2,8$	2,538086	2,538086	8,2E-09	8,2E+11	6,6E-28	5,0E-07
$l = 6,8$	$d = 2,9$	2,538086	2,538086	4,0E-09	4,0E+11	3,2E-28	1,0E-06
$l = 9$	$d = 4$	2,538086	2,538086	1,2E-12	1,2E+08	9,3E-32	3,5E-03

Figur 4.9: Tunneleringsider for forskellige valg af  $\Phi_0$  og  $l$ .

## 4.6 Opsummering

Vi har nu regnet på både dekoherenstiden og tunneleringstiden for et ammoniakmolekyle, samt med dobbeltbrøndmodellen fundet ud af i hvilken størrelsesorden et (ammoniakkignende) molekyle skal være, før det ikke udviser kvanteeffekter som tunnelering. Vi nåede frem til, at dette system ikke behøver være ret meget større end ammoniakmolekylet, før dekoherenstiden tangerer tunneleringstiden.

Da man må betegne ammoniakmolekylet som mikroskopisk (eller i alle tilfælde ikke-makroskopisk) – og ligeledes for et system, der blot er lidt større – kan vi slutte, at vi allerede her afskæres fra at observere superposition af makroskopisk forskellige tilstande. Der er derfor ikke noget krav om, at systemer skal være makroskopiske, før man kan tale om dekoherens.

Både udregningerne af dekoherenstiden og af tunneleringstiden er indirekte beviser for effekternes eksistens. Ved indirekte bevis kan vi i denne sammenhæng forstå følgende:

*A og B er to situationer, som ikke kan være aktuelle samtidig. Hvis man antager, at A til  $t = 0$  er aktuel, og dette så nødvendigvis medfører, at B efter en vis tid bliver aktuel, så må man konkludere, at B altid er aktuel efter dette tidsrum.*

I udregningen af dekoherenstiden antager vi, at ammoniakmolekylet til at starte med er i en superponeret tilstand af de to dipolmomenttilstande — svarende til ovenfor nævnte situation A. Vi når frem til, at denne superposition i løbet af dekoherenstiden vil ødelægges af de andre molekyler i gassen, fordi molekylerne indbyrdes vekselvirker med deres dipolmoment. Vi ender derfor i situation B, hvor molekylerne *altid* vil være i én egentilstand for dipolmomentet, og derfor vil dekoherenseffekten – når den vel at mærke er kraftig nok – forhindre superposition af de for ammoniak makroskopisk forskellige tilstande for dipolmomentet.

Med hensyn til tunneleringseffekten finder vi, at hvis et ammoniakmolekyle til tiden nul med sikkerhed befinder sig i den ene tilstand for dipolmomentet (situation A), så vil det indenfor tunneleringstiden kunne tunnelere til den anden tilstand. Derfor vil et isoleret ammoniakmolekyle, selvom det fra starten er i den ene tilstand, ikke forblive dér. Molekylet ender således med at skulle beskrives som værende i



en superposition af de to egentilstande for dipolmomentet (svarende til situation B).

Vi beviser derfor begge effekters eksistens ved at antage, at situationen til at starte med er den modsatte af, hvad vi ønsker at vise, den vil ende med. Hvilken een af effekterne, der er dominerende, afgøres så af hvilken der har den korteste "procestid".

Nu skal man selvfølgelig tage højde for, at vi i dette kapitel har foretaget en del overslagsregninger og anvendt forholdsvis grove modeller, men vi må forvente at vores forsimplinger ikke kan betyde, at dekoherenseffekten bliver kraftigere. Det er jo kun fordi vores eksempel er så simpelt, at vi kan opstille og vurdere virkningen af den støjfunktion, som er årsag til dekoherens. I et mere kompliceret tilfælde vil dissipationen formentlig resultere i en kraftigere støj og dermed en kortere dekoherenstid.

## Kapitel 5

# Fortolkninger og metafysik

Vi har i de to foregående kapitler præsenteret to udlægninger af kvantemekanikken, som hver især giver et bud på, hvorfor vi ikke ser superpositioner af makroskopisk forskellige tilstande. For at kunne bedømme kvaliteten af disse to fortolkninger må vi beskæftige os lidt med, hvad vi forstår ved en fortolkning af en fysisk teori og i særdeleshed af kvantemekanikken, og hvorfor fortolkninger overhovedet er nødvendige i fysikken. Derudover skal vi se på hvilke krav, vi må stille til en fortolkning.

### 5.1 Hvorfor fortolke?

I fysikken plejer vi at beskæftige os med relativt simple objekter og problemstillinger<sup>1</sup>, og det kan derfor måske virke overraskende, at det er nødvendigt at kræve yderligere forklaringer af disse teorier. Det er da heller ikke nødvendigvis gældende for alle fysikkens områder, men er et absolut "must" for kvantemekanikken, hvilket skyldes den måde, hvorpå kvantemekanikken kan (eller måske snarere *ikke* kan) relateres til dagligdagen.

Målet for fysik har altid været at forklare verden, som den fremtræder for os. Heldigvis, kan man sige, findes der i omverdenen en række regelmæssigheder, der gør det muligt at tale om generelle træk ved den måde, hvorpå vi oplever fænomener — træk der betyder, at vi kan

---

<sup>1</sup> Relativt i forhold til fx biologi og samfundsvidenskaberne.

konstruere en repræsentation af virkeligheden, hvilket er det grundlæggende koncept for fysik. Som Roland Omnés udtrykker det:

*"Science ... begins by a mental representation of reality, which is possible because reality itself is so full of regularities as to allow language, logic, and reasoning to describe it faithfully. In that sense, science is a representation of reality that is expressed by a language whose main structure is logic."*<sup>2</sup>

Udviklingen af matematik som redskab – eller sprog – for fysikken har gjort faget i stand til at kunne levere kvantitative, entydige og objektive<sup>3</sup> forudsigelser om virkeligheden. Netop kvantitative forudsigelser har givet fysikken sin virkelige styrke.

Men ved brugen af matematik har fysikkens mål fået en ny drejning. Nu er opgaven at give en matematisk repræsentation af virkeligheden. Ethvert element i en sådan beskrivelse må nødvendigvis svare til et element af virkeligheden, og enhver forudsigelse repræsentationen giver, må svare til et fænomen vi kan finde i virkeligheden.

For de fleste af den klassiske fysiks teorier har dette ikke givet nogen problemer. Forudsigelserne stemmer overens med vores intuitive fornemmelse af, hvordan verden er skruet sammen, dvs. den sunde fornuft. Men for teorier, der ligger uden for den klassiske fysik, forholder det sig lidt anderledes. Dette gælder fx for den specielle relativitetsteori, hvor forudsigelserne er kontraintuitive, og teorien betyder, at vi har været nødt til at revidere vores opfattelse af fx tidsbegrebet. Den matematiske repræsentation af virkeligheden har revet sig løs fra den sunde fornufts repræsentation, og forskellen mellem virkeligheden som den umiddelbart synes og dens videnskabelige repræsentation er for alvor blevet tydelig. En fortolkning af teorien er nødvendig.

En sådan fortolkning har til formål at forbinde teoriens abstrakte koncepter med noget, der er at finde i dagligdagen, dvs. fænomener, og således reformulere sund fornuft i en form, der stemmer overens med de fænomener, vi kan iagttage ved eksperimenter. Det er dog vigtigt, at man ikke forfalder til at ændre den sunde fornuft *kun* på baggrund af en teori.

---

<sup>2</sup>[Omnés, 1994], side 93.

<sup>3</sup>Med objektive menes her blot, at forudsigelserne ikke afhænger af hvem der udtaler sig.

Der er egentlig ikke noget mærkeligt i, at den sunde fornufts repræsentation af virkeligheden ikke er universel gyldig. Sund fornuft kan netop karakteriseres som "*...the spontaneous initial representation of reality every one of us builds up as an infant, mankind itself having elaborated upon it during its own infancy and cast it into the mold of language.*"<sup>4</sup>

Med denne definition er sund fornuft ikke det samme som sandhed eller endegyldig viden men et udtryk for et opnået niveau i erkendelse om, hvordan verden hænger sammen. Sund fornuft er på den måde foreløbig og ændrer sig i overensstemmelse med individets/menneskehedens erkendelsesmæssige udvikling. Det, der er sund fornuft for en teenager, behøver derfor ikke være sund fornuft for en fysiker.

Når vi her og i det efterfølgende beskæftiger os med sund fornuft, anvender vi begrebet som et udtryk for den blandt fysikere typiske erkendelsesmæssige overbevisning om verdens sammensætning og opbygning — dvs. den typiske ontologiske opfattelse i faget fysik. Vi er klar over, at en sådan ikke eksisterer eksplicit, hvis den overhovedet er mulig at definere, men vi har brug for en størrelse, som vi kan referere til, når vi siger, at noget er mærkeligt. Når vi således mener, at et eller andet strider mod sund fornuft, betyder det at vi ikke kan placere det i analogi til noget som helst andet vi kender til.

Den sunde fornufts udgangspunkt er netop vores omgivelser, dvs. den virkelighed vores sanser opfatter, og derfor følger mange koncepter i den sunde fornuft også direkte fra perceptioner af omgivelserne. Vi kan således ikke stole på vores sunde fornuft, når det gælder udtalelser om virkeligheden indenfor regioner, som vi ikke umiddelbart har sanseindtryk fra.

Derimod kan vi bruge eksperimenter, som faktisk er den eneste sikre kilde til viden om virkeligheden. Men den viden, vi umiddelbart får ud af eksperimenter, er ikke særlig brugbar, for hvad er den andet end en kendsgerning eller en samling af kendsgerninger, og for at disse kan relateres til teorien må vi give en fortolkning. Fortolkninger er dermed forbindelsesleddet mellem på den ene side den matematiske, abstrakte formulering af en teori og på den anden side kendsgerninger beskrevet med et dagligdags sprog og opnået med eksperimenter.

---

<sup>4</sup>[Omnés, 1994], side 95.

Roland Omnés formulerer det som at fortolkning er "*...a translation of the language of facts into the formal language of a theory.*"<sup>5</sup>

Formålet med fortolkning er derfor på baggrund af teori af forklare fænomenologi. En fortolkning af kvantemekanikken skal således gøre os i stand til at svare på spørgsmålet: Hvordan ser verden egentlig ud i følge kvantemekanikken?

Der har i det 20. århundrede inden for fysikken været en tendens til at negligere den slags videnskabsfilosofiske eller *metafysiske* spørgsmål. Ordet metafysik har ligefrem været brugt som et skældsord af fysikere om emner, som man har betragtet som uvidenskabelige og ufysiske. Det hænger sammen med den i de sidste to århundreder dominerende videnskabsfilosofiske overbevisning i fysik: Nominalismen. Det er forestillingen om, at begreber ikke har reel eksistens men blot er navne, som sammenfatter fænomener med visse fælles træk. Som eksempel på nominalismen kan vi nævne københavnerfortolkningen, som ikke opfatter bølgefunktionen som reel på nogen måde men blot som en regnestørrelse.

Det var nominalismen, der førte til positivismen, som forsøger at bygge al viden på "positive kendsgerninger", dvs. rå sanseindtryk eller protokolsætninger, men som ovenfor nævnt er sådanne kendsgerninger, som man jo får fra eksperimenter, ikke alene i stand til at give nogen beskrivelse eller forklaring på virkeligheden. Der findes ikke sådan noget som objektiv viden. Ja, man kan diskutere, om der overhovedet findes rå sansedata, fordi enhver sansning er forbundet med en form for peception dvs. en mental bearbejdning. Vi vil altid have brug for en form for fortolkning af de rå sansedata samt en filosofien over videnskabelige begrebers mening og betydning<sup>6</sup>.

## 5.2 Sprogets betydning

I hvilket sprog skal en fortolkning af kvantemekanikken formuleres? Det skal være et sprog, som på en entydig måde forklarer os, hvad det er vi iagttager i de kvantemekaniske eksperimenter. Der får vi vores

---

<sup>5</sup>[Omnés, 1994], side 98.

<sup>6</sup>At hævde andet, dvs. at mene at metafysiske spørgsmål ikke er for fysikere men kun for filosoffer er selvfølgelig et valg af overbevisning, men det er vigtigt at huske, at en sådan overbevisning også er metafysik.

oplysninger fra måleapparater, der alle har ét til fælles: De leverer data i en klassisk forstand, dvs. i form af ganske velkendte størrelser, som anvendes i andre grene af fysikken. Derfor skal vi bruge det samme sprog til at forklare kvanteeksperimenter, som vi bruger i alle andre dele af fysikken. Det sprog er dagligdagssproget — eller snarere en præciseret udgave af dagligdagssprog.

Det dagligdags sprog er det sprog, vi anvender, når vi henvender os til hinanden. Vi forlangte ovenfor, at sproget skulle være entydigt, hvilket man jo ikke altid kan sige, at dagligdagssprog er. Hvor tit sker det ikke, at vi går fejl af hinanden pga. en sproglig misforståelse. Men det kan undgås i det fysiske dagligdagssprog ved præciseringer af begreber. Man kan sige, at vi i fysikken reducerer dagligdagssproget og fjerner dets tvetydigheder — men vel at mærke kun til en vis grænse! Vi har nemlig stadig brug for ubestemtheder i fysikken; tænk blot på begrebet en farve, hvor man netop beskriver et uendelig antal bølgelængder i et ubestemt interval. Når man bruger begrebet farve er det fordi man ikke ønsker at specificere yderligere, hvad man taler om, fordi man taler om en gruppe eller *kategori*.

En sådan ubestemthed er det Peirce kalder vaghed<sup>7</sup>. Han skelner imellem to former for vaghed: Vagthed i dybden og vagthed i bredden.

Vagthed i bredden minder om generalitet, men der er alligevel tydelig forskel. Et generelt udsagn specificerer helt præcist hvem eller hvad, der tales om: Udsagnet alle elektroner har spin-1/2 fortæller os, at ligegyldig hvilken elektron vi taler om, så har den spin-1/2. Anderledes forholder det sig med udsagn, som er vage i bredden: Udsagnet alle trekanter har vinkelsummen 180 grader er vagt, fordi det er sandt eller falsk afhængig af konteksten dvs. om der er tale om euklidiske trekanter eller ej.

En fysiker vil i en teoridannelse forsøge at undgå vaghed i bredden, fordi det er nødvendigt for at kunne definere teoriens gyldighedsområde. Et udsagn, der har vaghed i bredden, kan ikke bedømmes ud fra falsifikationskriteriet. Generelle udsagn derimod er det muligt at falsificere; fx vil opdagelsen af én elektron, som ikke har spin-1/2, betyde, at det ovenfor anførte udsagn er falsk. At falsifikationskriteriet kan benyttes, er fundamental i definitionen på, hvad der kan kaldes videnskabeligt.

---

<sup>7</sup>For en indføring i den amerikanske filosof Charles Sanders Peirces videnskabsteori, se [Peirce, 1994]. Begrebet vaghed er særlig grundigt behandlet i [Engel-Tiercelin, 1991].

Da vi her beskæftiger os med videnskabelige fortolkninger af kvantemekanikken, må vi forlange at disse fortolkninger er falsificerbare og dermed heller ikke har vaghed i bredden.

Vaghed i dybden har vi fx, når vi taler om bestemte værdier af *spin* af elektroner i forhold til *en given retning*. Den klassiske betydning af ordet spin har en præcis definition, nemlig rotation om en fast akse, men den kvantemekaniske udgave af spin kan vi ikke få samme afklarede forhold til. Det har ingen mening at tillægge en elektron en bestemt spinværdi, medmindre konteksten er fastlagt.

I de fleste sammenhænge i dagligdagen kan vi undgå vaghed i bredden, hvis vi ønsker det, men kommunikerer vi blot på et rimeligt abstraktionsniveau vil vaghed i dybden være en forudsætning for mening i sproget. For eksempel giver udsagnet "hun har rødbrunt hår" straks tilhøreren en fornemmelse af hvilken farvenuance, der menes, men forskellige tilhørere vil formentlig have en forskellig opfattelse af, hvilke hårfarver, der ligger indenfor kategorien "rødbrun". Denne vaghed giver os ikke lov til at give invariante definitioner på, hvad "rødbrun" er, men samtidig er det umuligt overhovedet at give en fuldstændig præcis definition, fordi farver beskriver et kontinuum.

Et andet eksempel er udsagnet "der er koldt hjemme hos mig". Tilhøreren kan kun bedømme udsagnet ud fra et kendskab til, hvad taleren opfatter som koldt og varmt, hvilket jo ikke engang kan defineres invariant, fordi taleren kan have forskellige opfattelser af koldt og varmt på forskellige tidspunkter. Udsagnet giver kun mening, eller giver kun en entydig mening, når konteksten er klart defineret — om det fx er en kold vinterdag, hvor man går og småfryser, eller om det er hede bølger i juli måned.

Vi kan prøve at konstruere "sprog", som er næsten fri for vaghed, og det bedste eksempel herpå er vel matematik, men matematik er heller ikke noget velegnet sprog til at beskrive virkeligheden som helhed med.

Når vi må beskrive naturen med en vis vaghed kommer det ikke af sproget men af naturen selv. Hvis vores sprog, som jo benytter sig af kategorier, skal beskrive den kontinuerte natur må det nødvendigvis medføre en vis vaghed i beskrivelsen.

Men er det sproget, vi har til rådighed, som er utilstrækkeligt? Hvad nu, hvis vi forsøger at konstruere et *nyt* sprog specielt designet til at kunne fortolke kvantemekanikken med — kunne vi så undgå alle vores

problemer? Sådanne forsøg er faktisk gjort i udviklingen af de såkaldte kvantelogikker. Men vi ender i samme situation som før: Vi får ingen forklaring på verden ved at beskrive den med en logik udledt af kvantemekanikken. Udgangspunktet skal altid være den logik, vi finder i dagligdagssproget, fordi det er med dette sprog vi overhovedet kan siges at forstå noget. Vi har kun ét sprog til at give en fortolkning med, og det er dagligdagssproget.

Det er dog ikke så lige til at benytte dagligdagssprog, når vi taler om kvantemekanik. Redskaber som logik er ikke så veldefinerede, som vi er vant til. Det, vi normalt forstår som værende logisk, er noget som følger den klassiske logik, hvor en sætning fx ikke både kan være sand eller falsk. Denne almindelige form for logik er udtalt i klassisk fysik og står i skarp modsætning til kvantelogik. For eksempel gælder Boolesk algebra ikke i kvantemekanikken. Det er den distributive egenskab ved almindelig logik, der gør, at hvis A er sand og B eller C er sand, så er enten A og B sand eller A og C er sand. Det gælder ikke hvis vi fx betragter spinnet af partikler. Hvis en partikel sendes gennem et filter, der kun lader spin-op partikler igennem er spin-op sand. Hvis filteret lader både spin-venstre og spin-højre partikler igennem er spin-venstre eller spin-højre sand. Men hvis vi lader partikler passere begge slags filtre, kan vi ikke sige, at selvom spin-op og (spin-venstre eller spin-højre) er sand, så er (spin-op og spin-venstre) eller (spin-op og spin-højre) sand. Den traditionelle logik er brudt, når vi taler om komplementære størrelser.

Kvantelogik er altså tydeligvis forskellig fra klassisk logik og Boolesk logik. Men er den så fjern fra egentlig dagligdagslogik? Nej, for selvom det er ulogisk at sige, at man er 19 og 76 år på én gang, er der ikke noget der forhindrer os i at tale om en ung dame på 76 år. Mange egenskaber i dagligdagen minder om karakteren af kvantemekaniske egenskaber såsom spin. Hvis man spørges "hvilket tal tænker du på?", vil man straks kunne svare fx "42", men denne "egenskab" at ville svare "42" på spørgsmålet var jo ikke fastlagt på forhånd. Selve spørgsmålet tvivler den adspurgte til at give et svar. Det eneste, man kan sige om en sådan "egenskab", er, at mennesker har en evne til at kunne præstere et svar på et spørgsmål af denne karakter, selvom man måske i virkeligheden slet ikke tænkte på noget bestemt tal. Både dagligdagslogik og kvantelogik er vaghedslogikker (i modsætning til klassisk logik), så i virkeligheden minder kvantelogik mere om de logiske konventioner vi til daglig anvender i sproget, end man umiddelbart skulle tro.



### 5.3 Vurdering af fortolkninger

Gödel viste i 1930'erne, at teorien for de hele tal ikke kan bevise sig selv, hvilket derfor også gælder for formelle systemer af en vis kompleksitet (dvs. systemer, der indeholder hele tal). Det vil altid være muligt at konstruere indre paradokser af typen "denne sætning er falsk". Gödels teorem gælder matematiske systemer og kan derfor ikke direkte overføres til fysiske systemer, men når selv de mest stringente systemer, vi kender, ikke kan redegøre for sig selv, må vi gå forsigtigt frem, når talen går på fysiske teorier: Kvantemekanikken kan ikke selv definere sine grænser for gyldighed. Og grænser er der: Vi kender til fænomener, der ligger indenfor teorien men også udenfor! At hævde at kvantemekanikken er universel gyldig forstået som, at verden som helhed kan beskrives ved en bølgefunktion og dermed er deterministisk, er at bekende sig til nødvendighedens doktrin.

---

Nødvendighedens doktrin foreskriver, at kendes tingenes tilstand (fx position og hastighedsvektorer) fuldstændigt til ét tidspunkt, kan tilstanden til et hvilket som helst tidspunkt i fortid og fremtid beregnes. Denne form for necessitarianisme kaldes mekanisk filosofi og er en forældet filosofi, som Peirce allerede tilbageviste i 1892<sup>8</sup>.

Det kan hævdes, at nødvendighedens doktrin er bevist gennem observation af naturen. Det mener Peirce ikke, for kontinuerte størrelser kan aldrig angives eksakt. Det ligger netop i definitionen på kontinuitet. Alle med kendskab til laboratoriearbejde ved, at intet kan bestemmes med en fejl på nul. Peirce skriver oven i købet, at ideen om at man i laboratoriet demonstrerer matematisk eksakthed er latterlig!

Men hvad så med diskontinuerte størrelser? De findes jo trods alt — også i naturen. I hvert fald størrelser, der udviser diskontinuitet inden for visse grænser, som fx at en størrelse ikke kan optræde med negative værdier og derfor i visse sammenhænge med sikkerhed kan siges at være nul. En linje kan ikke have negativ længde, så hvis vi undersøger et stykke papir, hvorpå en person er blevet bedt om at tegne en linje ud fra et allerede eksisterende punkt, og vi i vores undersøgelse ikke kan måle/se nogen linje fra punktet, må vi konkludere — og det er det *eneste* vi kan — at linjens længde er mindre end den mindste enhed, som vort måleudstyr kan registrere.

---

<sup>8</sup>Artiklen "The Doctrine of Necessity Examined" udgivet i *The Monist*, vol. II, no. 3, p. 321, april 1892. Findes oversat til dansk i [Christiansen, 1988].

Men hvis nu vi positivt véd, at personen umuligt kan have tegnet en linje (fx fordi han aldrig har været i nærheden af papiret) — så må vi da med sikkerhed kunne slutte, at linjens længde er nul. Ja, det er rigtigt, men årsagen til at vi kan give en eksakt udtalelse, er betinget netop af anden erfaret viden (vi véd, at personen ikke har været i nærheden af papiret) og kan på ingen måde alene gøres gyldig ud fra det faktum, at vi ikke er i stand til at måle en linje.

At observationer af naturen normalt udviser en form for regelmæssighed medfører på ingen måde, at naturen udviser *eksakt* regelmæssighed — tværtimod. Jo mere præcist man formår at måle en størrelse (dvs. i jo højere grad man er i stand til at eliminere systematiske fejl), jo større rolle vil tilfældige afvigelser spille, og disse kan ikke fjernes.

Derfor er det forkert at forvente, at kvantemekanikken er universel gyldig. Som Peirce udtrykker det: *"Hvis man siger, at der findes en universel lov, og at det er et hårdt, ultimativt og uforståeligt faktum, som man aldrig kan søge en forklaring på, så vil en sund logik gøre oprør; og den vil straks gå over til en måde at filosofere på, som ikke således barrikaderer opdagelsens vej."*<sup>9</sup>

I forsøget på at afgøre grænserne for kvantemekanikken må man — ligesom ovenfor i eksemplet med linjen på papiret — være forberedt på nødvendigheden af at trække på anden erfaret viden. Vi kan ikke regne med, at kvantemekanikken selv fastlægger sine grænser for gyldighed. Vi har her brug for en fortolkning.

Hvordan skal man så bedømme en fortolkning af kvantemekanikken; hvilke kriterier skal vi stille op for en oversættelse af fænomener til teori? Ud fra det foregående kan vi formulere følgende krav:

---

<sup>9</sup>[Christiansen, 1988], side 106.

Fortolkningen skal være

- i overensstemmelse med eksperimenter, eftersom det jo netop er fra dem, vi har vores viden om de fænomener, som vi prøver at beskrive.
- i stand til at fortælle, hvor grænserne for kvantemekanikkens gyldighedsområde går.
- konsistent, dvs. fri for indre modsigelser.
- falsificerbar, dvs. det skal være muligt at afgøre om fortolkningen er forkert.

Vi vil i den følgende diskussion anvende disse krav i vores vurdering af, om de præsenterede udlægninger af kvantemekanikken — teorien om dekoherens og mange-verden fortolkningen — vitterlig er i stand til at give en rimelig forklaring på, hvorfor vi ikke ser superpositioner af makroskopisk forskellige tilstande.

# Kapitel 6

## Diskussion

Vi har delt vores diskussion op således, at vi først kommer med en kritik af MV-fortolkningen, dernæst med en kritik af dekoherens. Til slut følger konklusionen.

### 6.1 En kritik af MV-fortolkningen

Vi begynder med en vurdering af MV-fortolkningen som bud på, hvorfor vi ikke ser makroskopisk interferens. Det kan dårligt nægtes, at MV-fortolkningen faktisk *giver* en løsning, men spørgsmålet er, om man kan leve med "sidegevinsterne", dvs. det verdensbillede som MV-fortolkningen giver.

Der er mange, der har udbygget MV-fortolkningen og mindst lige så mange, der har fundet anledning til at kritisere den. Kritikken går ofte på, at forkastelsen af postulatet om bølgefunktionens kollaps fører til det fysisk uacceptable billede med de mange verdener. Skal man imidlertid forholde sig til Everetts artikel, er det mindst lige så vigtigt, at man undersøger de argumenter Everett kommer med *inden*, han når til sin konklusion. I det følgende vil vi dels kritisere Everetts argumenter, dels diskutere om MV-fortolkningen opfylder de krav, vi stillede til en fortolkning i kapitel 5.

Roland Omnés kommenterer MV-fortolkningen således:

*"It is not science because no experiment can show it to be wrong and it is not a theoretical truth because there can be no proof of it and it is not nonsense because one cannot prove it to be inconsistent."*<sup>1</sup>

Citatet viser, hvorfor mange finder det svært at afvise MV-fortolkningen blankt. Man kan ikke modbevise eksistensen af mange verdener, når det er antaget, at de netop ikke påvirker hinanden, og antagelsen om verdenernes samtidige eksistens bliver et spørgsmål om tro. Men når det er et spørgsmål om tro, er det samtidig et spørgsmål, man ikke kan formulere og teste eksperimentelt. MV-fortolkningen opfylder derfor ikke falsifikationskriteriet, dvs. at det skal være muligt at formulere udsagn, der kan føre til falsifikation af fortolkningen.

Man kan også tage William of Ockham's berømte ragekniv<sup>2</sup> i brug og spørge, hvorfor en enkelt vekselvirkning (fx i et atom) skulle betyde, at verden forgrenes i flere dele af lige stor betydning. Man behøver ikke tænke i mange sekunder, før man får svært ved at forestille sig de myriader af verdener der må være, hvor nogle nogle må være så godt som ens og andre så forskellige, at kun ens fantasi sætter grænser. Ockham's ragekniv illustrerer, at man ikke skal rode sig ud i alle mulige konsistente og logiske teorier, hvis det medfører, at man må gøre sig alle mulige (og umulige) antagelser for at forklare enkle ting. Everetts verden splitter op, uanset om der er tale om flere mulige tilstande på mikroskopisk eller makroskopisk niveau.

Ifølge Everett kan alt beskrives ved en bølgefunktion. Han skelner altså ikke mellem rene og blandede tilstande, og han anvender schrödingerligningen betingelsesløst overalt og til alle tider. Vi mener, at det kun er muligt at opskrive en bølgefunktion og dermed schrödingerligningen for rene tilstande, altså systemer, hvori der ikke forekommer dissipation. Man kan sige, at schrödingerligningen kun duer for systemer, hvor der foregår reversible processer. Det duer altså ikke at sige, at nu isolerer vi geigertæller, giftgas, kat og hele molevitten og betragter det som et isoleret system, som vi kan beskrive med en bølgefunktion, for der foregår irreversible processer i kassen.

MV-fortolkningen sætter ingen grænser for kvantemekanikkens gyldighedsområde, hvilket må betyde, at Everett mener, at det må være muligt (om end meget kompliceret) at opskrive en bølgefunktion for

<sup>1</sup>[Omnes, 1994], side 345.

<sup>2</sup>*Multiplicitas non ponenda sine necessitate*, dvs. mangfoldighed bør ikke fremsættes uden det er nødvendigt.

hele universet, eller måske for hver af dem!! Det kan være, at Everett mener, at termodynamikken ikke gælder for overalt i fysikken, men han specificerer ikke, hvad der er nødvendigt for en måling. Han beskriver godt nok en hukommelsesfunktion, og hvordan den virker, men diskuterer ikke, hvad der kræves, for at noget er registreret. Vi har svært ved at se, hvordan en registrering kan ske uden, at der foregår noget irreversibelt — med andre ord, hvordan han helt kommer udenom termodynamikken.

Man må derfor indvende, at fortolkningen hviler på forkerte antagelser, da måleprocessen af natur er irreversibel (ellers kan man ikke foretage en registrering), mens schrödingerligningen er reversibel, og man kan ikke beskrive en irreversibel proces med den reversible schrödingerligning.

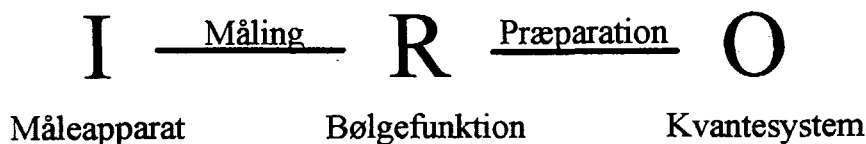
Hvis man som Everett insisterer på at schrödingerligningen gælder overalt og til alle tider, er det altså muligt at opskrive en bølgefunktion for ethvert system. Everett skriver faktisk, at han ikke skelner mellem systemet og bølgefunktionen for systemet. Han beskæftiger sig derfor heller ikke med *præparationen*, som forudsætning for en måling. At det ikke har nogen mening at tale om en bølgefunktion for et upræpareret system, kan man blandt andet redegøre for udfra Peirces tegnteori fortolket i termer af kvantemekanikken [Christiansen, 1995]. I denne tegnteori er et tegn en triadisk relation, hvilket kan beskrives på følgende måde:

*"Et Tegn, eller Repræsentamen, er et Første, der står i en ægte triadisk relation til et Andet, der kaldes dets Objekt, og derved er i stand til at udvirke, at et Tredje, der kaldes dets Interpretant, indtager den samme triadiske relation til dets objekt, som tegnet selv står i til det samme Objekt."*<sup>3</sup>

Som det ses på figur 6.1 har vi opskrevet de tre dele af tegnrelationen i kvantemekanikken. De enkelte dele er objektet, O, der i denne sammenhæng er systemet, representamenet eller tegnbæreren, R, der er bølgefunktionen og endelig interpretanten, I, der er måleapparatet. Relationen mellem de forskellige dele af tegnrelationen kaldes *links*. Link'et mellem bølgefunktionen og objektet er præparationen, og link'et mellem bølgefunktionen og måleapparatet er målingen. I denne sammenhæng er det interessant, at hvis vi skal kunne opskrive en bølgefunktion,

---

<sup>3</sup>[Peirce, 1994], side 116.



**Figur 6.1:** Tegnrelationen i kvantemekanikken.

dvs. tilskrive den nogen mening, forudsætter det at systemet er præpareret. Der er flere forskellige grader af præparation. Er præparationen *potentiel* er der kun forestillingen om hilbertrummet, som det vil være *muligt* at opskrive en bølgefunktion i — den matematiske ramme er der. Næste niveau er det *aktuelle*, som symboliseres med en tom ket  $| \rangle$ . Vi laver fx en partikelstråle uden at specificere partiklernes hastighedsvektorer. Endelig er der den *generelle* præparation, fx en veldefineret partikelstråle, der sendes gennem et Stern-Gerlach apparat for at måle spin. Det sætter os i stand til specifikt at opskrive en bølgefunktion for partiklens spin.

Et link adlyder den udvalgsregel, at et link mellem to tegn, ikke kan have et højere niveau end det foregående link<sup>4</sup>. Det vil sige at hvis præparationen er aktuel, så kan målingen ikke være generel, men kun potentiel eller aktuel. Vores relation er derfor en ægte triadisk relation, fordi det andet link, målingen, netop er defineret i forhold til karakteren af det første link, præparationen. Diracs bracket-notation er, hvis man kigger nærmere efter, en formalisme, hvori præparationen er "indbygget". Sandsynlighedsamplituden for en bestemt værdi af en observabel ved en måling er givet ved:

$$\langle \phi | \psi \rangle \quad (6.1)$$

Man kan ikke opskrive en bra  $\langle \phi |$ , dvs. systemets tilstand efter en måling, uden at man kender til systemets tilstand før målingen, dvs. ket'en,  $|\psi\rangle$ , og som vi argumenterede for før, kan man ikke opskrive ket'en, før man har præpareret systemet generelt. Dirac-notationen viser, at kvantemekanikken naturligt følger den triadiske tegnrelation.

<sup>4</sup>Tegnrelationer skal læses fra højre mod venstre, dvs. mod læseretningen

Fordi vi først kan opskrive bølgefunktionen ved den generelle præparation, er det kun ved den generelle præparation, at bølgefunktionen kan siges at være reel. Her skal reel ikke forstås som fysisk eksisterende. Man kan i stedet sammenligne bølgefunktionen ved den generelle måling med feltlinjebegrebet som anvendes i elektrodynamikken. Vi kan altså godt have en realistisk opfattelse af bølgefunktionen uden at forfalde til MV-fortolkningen.

Everett regner faktisk med, at bølgefunktionen er reel, idet den antages at være en grundlæggende fysisk entitet. Dette ligger meget langt fra københavnerfortolkningens opfattelse af bølgefunktionen som en ren regnestørrelse. I forhold til tegnrelationerne er Everett derfor ikke på vildspor med hensyn til at mene, bølgefunktionen er reel. Han går dog for vidt i retning af slet ikke at skelne mellem kvantesystemet (objektet) og bølgefunktionen (representamenet), fordi han ikke medtager præparationen. Dette betyder, at Everett blot har en dyadisk tegnrelation, svarende til I-O, hvor måleresultatet er kontekstuafhængigt, akkurat som i den klassiske fysik, hvor tingenes egenskaber opfattes som iboende tingene selv. Et eksempel herpå er en fjeders stivhed, der regnes som uafhængig af forsøgsopstillingen (indenfor rimelige grænser).

Everett skelner heller ikke mellem det potentielle og det aktuelle, hvilket giver anledning til de mange verdener. Alle elementerne i superpositionen er efter Everetts opfattelse "lige gode", hvad der ikke er foreneligt med en opfattelse af en måling, hvor man går fra at have en beskrivelse af det potentielle (det, man har mulighed for at måle) til det aktuelle (det, man måler). Når man netop som fysiker vil studere effekter i den omgivende verden, er det en stor del af arbejdet at opstille en model, hvor man bruger mange kræfter på at skelne væsentligt fra uvæsentligt, før man går i gang. Når al information betragtes som lige vigtig, er al information også lige meningsløs, og så kommer man ikke ud af stedet. Det har derfor ikke nogen mening at argumentere for, at hver *mulig* tilstand svarer til én *faktisk* verden.

## 6.2 En kritik af dekoherens

I modsætning til MV-fortolkningen kræver dekoherensfortolkningen ikke, at vi ændrer hele vores syn på verdenen. Vi kan med denne fortolkning bibeholde vores sunde fornuft og verdensbillede, hvis vi anser



termodynamikken for at være fundamental og forlanger, at termodynamikkens 2. hovedsætning også skal være gyldig. Dekoherensfortolkningen er egentlig blot en udbygning af kvantemekanikken med kendte begreber og antagelser fra termodynamikken.

Vi vil i det følgende samle op på kapitlerne om dekoherens og forklare, hvorfor vi mener, dekoherensfortolkningen løser vores problem. Vi har dels beskrevet to forskellige måder, hvor man generelt kunne vise, at dekoherens forekommer i store systemer, og dels udregnet dekoherens-tiden i et konkret eksempel: Ammoniakmolekylet.

I den første udgave af dekoherens, der præsenteres i kapitel 3 og som følger fremstillingen i [Omnes, 1994], er udgangspunktet *koblingen* mellem den mekaniske energi og den indre energi symboliseret ved hamiltonoperatoren  $H_k$ . Ved at antage, at  $H_k$  er givet ved ligning (3.13) på side 31, når man frem til, at off-diagonalelementerne i tæthedsmatricen – som jo repræsenterer muligheden for, at systemet til en given tid er i en superposition af egentilstande af en bestemt operator – går mod nul, når tiden eller antallet af frihedsgrader går mod uendelig. Sandsynligheden for at observere interferens af makroskopisk forskellige tilstande for komplicerede systemer som fx måleapparater og katte må derfor være ekstremt lille, da disse systemer jo har mange frihedsgrader.

At der opstår dekoherens i systemer med mange frihedsgrader, og at dekoherenstider er meget små, kan være lidt svært at forholde sig til, før man kender til størrelsesordenen af "små" dekoherenstider og "mange" frihedsgrader for et konkret system. Hvis vi ønsker at vurdere effekten af dekoherens, skal vi kunne regne på størrelsen af dekoherenstiden.

Dette ønske om kvantitative beregninger kombineret med forestillingen om termodynamikkens anvendelighed i foretagendet, har resulteret i dekoherensformuleringen i kapitel 4. Her er udgangspunktet, at der ifølge fluktuations-dissipationsteoremet vil være støj i dissipative systemer, og at denne støj giver anledning til dekoherens. Vi anvender implicit termodynamikkens anden hovedsætning i vores karakteristik af måleapparatet ved definitionen af hamiltonoperatoren  $H_m$  i ligning (4.3) og når frem til tæthedsmatricen givet ved ligning (4.8) på side 39, som jo minder meget om tæthedsmatricen fundet i kapitel 3.

Ligning (4.8) giver os netop mulighed for at finde sådanne størrelsesordener, hvis vi kan vurdere hvor meget støj, der er i systemet. I afsnit 4.3 og 4.4 undersøger vi dekoherenstider kontra tunneleringstider for

ammoniakmolekylet. Vi finder her, at tunneleringstiden er en faktor 100 mindre end dekoherenstiden.

Når vi i afsnit 4.5 prøver at skrue på parametrene for systemet ved hjælp af modellen for dobbeltpotentialbrønden, ser vi, at der ikke skal meget til, før tunneleringstiden er af samme størrelsesorden som dekoherenstiden. Vi behøver faktisk bare at gøre potentialbarrieren i dobbeltpotentialbrønden dobbelt så stor, som den er i ammoniakmolekylet, eller gøre størrelsen af molekylet givet ved  $l$  3 gange så stor — resultatet er det samme; vi får nu tunneleringstider, der ligger tæt på dekoherenstiden. Ammoniakmolekylet udgør derfor et grænsetilfælde, hvor der ikke skal meget til, før end dekoherenseffekten vil dominere over tunneleringseffekten, og dette skal ses i perspektivet af, at ammoniakmolekylet er et relativt simpelt system. Jo mere komplicerede systemerne er, jo mindre vil dekoherenstiden være, og dekoherenseffekten vil derfor dominere i systemer af højere kompleksitet.

Dekoherensfortolkningen er svær at kritisere for at være spekulativt eller uvidenskabeligt og den lever, som vi vil redegøre for i det følgende, op til vores krav til en fortolkning. Hvis man kritiserer antagelserne i dekoherensfortolkningen, skal man argumentere for, at termodynamikkens 2. hovedsætning og fluktuation-dissipationsteoremet ikke er gyldige.

Dekoherensfortolkningens forklaring på, hvorfor vi ikke ser interferens af makroskopisk forskellige tilstande er konsistent og tillige i overensstemmelse med den treleddede tegrrelation I-R-O, som vi behandlede under diskussionen af MV-fortolkningen. I denne sammenhæng kan representamenet,  $R$ , forstås som bølgefunktionen eller tæthedsmatricen. Dekoherenseffekten er jo netop det, der karakteriserer måleprocessen, og præparationen forsøger fortolkningen ikke at undgå. Vi har altså alt det nødvendige med til den kvantemekaniske anvendelse af I-R-O relationen.

Dekoherens er også i overensstemmelse med udførte eksperimenter, forstået på den måde, at det ikke er overraskende, vi ikke ser interferens af makroskopisk skelnelige tilstande. Faktisk er dekoherens forklaringen på, hvorfor det overhovedet er muligt at udføre eksperimenter med kvantesystemer. Vi får ikke superpositionen af egentilstande hørende til en given operator i kvantesystemet overført ved målingen, for ved målingen sker der netop dekoherens. Ved systemets kobling med måleapparatet sker der dissipation, som medfører fluktuationer. Dette

betyder, at tilstande, som er makroskopisk forskellige, bliver ukorrelede, og de kan derfor ikke interferere. Således vil en viser altid kun have én placering, en geigertæller vil altid *enten* klikke *eller* ikke klikke, og en kat altid være *enten* død *eller* levende.

Dekoherensfortolkningen viser, at der er en overgang mellem den kvantemekaniske og den klassiske beskrivelse. Den definerer derfor – omend ikke skarpt – et gyldighedsområde for kvantemekanikkens beskrivelsesområde. Det bliver en glidende overgang mellem kvantemekanik og klassisk mekanik leveret af termodynamikken.

Det kan måske være svært at forstå, at dekoherensfortolkningen leverer forklaringen på, hvorfor en viser *altid* står ét sted, når sandsynligheden, for at den står to steder på en gang, blot er ekstremt lille. Sådanne tilfælde optræder imidlertid andre steder i fysikken, fx i Boltzmanns statistiske fortolkning af termodynamikkens 2.hovedsætning, hvor et fald i entropi ikke er umuligt, men blot overbevisende usandsynligt.

Dekoherensfortolkningen forudsiger, at det i praksis er umuligt at observere makroskopisk interferens i dissipative systemer, og at alle eksperimentelle forudsigelser, som vi kan gøre om fx et måleapparat, vil være nøjagtig de samme, som hvis vi fra starten fastlægger, at måleapparatet er i én eller anden bestemt tilstand (som vi så bare ikke kender). Formuleret i termer af SKP er det derfor i et hvilket som helst eksperiment umuligt at skelne superpositionen af en død og en levende kat fra en "klassisk blanding", dvs. en situation, hvor katten i virkeligheden er i tilstanden "død" eller i tilstanden "levende", men hvor vi bare ikke *ved* hvilken. Med en "klassisk blanding" menes en almindelig sandsynlighedsfordeling, som den kendes fra klassisk fysik.

Men man kan som A. J. Leggett mene "*that there is an unbridgeable logical chasm between the statements that the system behaves 'as if' it were in a definite macroscopic state and that it is in such a state*".<sup>5</sup> Det virkelige spørgsmål er, om superpositionsprincippet kan bruges til at beskrive makroskopiske systemer *uden* dekoherens, dvs. makroskopiske systemer uden støj. For at besvare dette spørgsmål kræves eksperimenter, hvor det er muligt at undgå dissipation mellem det undersøgte system og dets omgivelser. Det kan opnås med SQUID<sup>6</sup>, der fx kan være to parallelforbundne Josephson junctions.

<sup>5</sup>[Leggett, 1987], side 170.

<sup>6</sup>Superconducting Quantum Interference Device. Se [Feynman, 1965], kapitel 21 for en grundig beskrivelse af dette.

En Josephson junction er en isolator mellem to superledende materialer. Isolatoren er så tynd, at der kan ske tunnelering af elektroner gennem den, hvilket kan resultere i en makroskopisk strøm. Når man parallelforbinder to junctions, har man en superledende ring, hvori strømmen kan styres af den magnetiske flux gennem ringen (vha. eksterne magneter). Hvis man undersøger den samlede strøm som funktion af den magnetiske flux gennem ringen, får man et interferensmønster, dvs. der er interferens mellem strømmene i hver Josephson junction. Eftersom strømmene gennem de to junctions må betegnes som makroskopiske observable, har man altså her et eksempel på et system, der udviser makroskopisk interferens. Vi må derfor slutte, at superpositionsbeskrivelsen i systemer uden (tilstrækkelig) gnidning er gyldig, hvilket underbygger dekoherensfortolkningen som forklaring på, hvorfor man normalt ikke ser interferens af makroskopisk forskellige tilstande.

### 6.3 Konklusion

Både MV-fortolkningen og dekoherensfortolkningen leverer et svar på vores problemformulering. Men vi må på baggrund af den foregående diskussion forkaste MV-fortolkningen, fordi den er uvidenskabelig (ikke-falsificerbar og selvopfyldende), bygger på modstridende og fejlagtige antagelser og medfører en udvanding af fundamentale begreber såsom "virkelighed", hvorved ordene, som fortolkningen selv benytter, bogstavelig talt bliver meningsløse.

Anderledes forholder det sig med dekoherensfortolkningen, som vi finder leverer et rigtigt svar på vores problemformulering:

Vi kan konkludere, at grunden, til at vi ikke observerer interferens af makroskopisk forskellige tilstande, er, at der i makroskopiske systemer såsom måleapparater altid vil forekomme dissipation og dermed støj, som vil ødelægge korrelationen mellem de forskellige tilstande. Forekomsten af støj er kun tvivlsom, for så vidt gyldigheden af termodynamikkens 2. hovedsætning og fluktuations-dissipationsteoremet er tvivlsom.

Men kan vi sige, at fortolkningen af kvantemekanikken stopper her, og at vi efter dette besværlige metafysiske udredningsarbejde nu endelig kan vende tilbage til kvantekogebogen og dens ligefremme opskrifter på behandlingen af elementarpartiklerne? Nej, vi mangler noget. Selvom dekoherens er svaret på, hvordan off-diagonalelementerne i tæthedsmatricen går mod nul, har vi stadig at gøre med flere forskellige diagonalelementer. Ved en måling foretages et valg, og hvordan dette valg foregår står stadigvæk hen i det uvisse. Det vil sige, at vi stadig mangler beskrivelsen *det kvalitative spring* fra flere potentielle udfald af en måling til ét udfald: Springet fra *mulig* til *aktuel*.

## Appendiks A

### Udregninger af dekoherens

Vi vil i dette appendix give udregningerne af tæthedsmatricen  $\rho(t)$  for et meget simpelt system bestående af en partikel og dens omgivelser, der også er en partikel. Partiklen har til  $t = 0$  tilstanden  $|+\rangle$  med sandsynlighedsamplitude  $a$  og  $|-\rangle$  med sandsynlighedsamplitude  $b$ . "Omgivelserne" har til  $t = 0$  tilstand  $|+\rangle'$  med sandsynlighedsamplitude  $\alpha$  og  $|-\rangle'$  med sandsynlighedsamplitude  $\beta$ . Det samlede system til  $t = 0$  har derfor bølgefunktionen

$$|\psi(0)\rangle = (a|+\rangle + b|-\rangle) \otimes (\alpha|+\rangle' + \beta|-\rangle') \quad (\text{A.1})$$

Partiklen vekselvirker med "omgivelserne", hvilket udtrykkes ved hamiltonoperatoren

$$H_k = \hbar g \sigma_z \sigma_z' \quad (\text{A.2})$$

hvor  $g$  er koblingskonstanten, og  $\sigma_z, \sigma_z'$  er analoge til paulimatricen. Systemet udvikler sig i tid som

$$|\psi(t)\rangle = e^{-iH_k t/\hbar} |\psi(0)\rangle \quad (\text{A.3})$$

hvilket giver

$$|\psi(t)\rangle = e^{-iH_k t/\hbar} (a|+\rangle \otimes (\alpha|+\rangle' + \beta|-\rangle') + e^{-iH_k t/\hbar} (b|-\rangle \otimes (\alpha|+\rangle' + \beta|-\rangle')) \quad (\text{A.4})$$

$e^{-iH_k t/\hbar}$  virkende på  $a|+\rangle \otimes \alpha|+\rangle'$  giver  $e^{-igt}$ . Systemet vil derfor udvikle sig således:

$$|\psi(t)\rangle = a|+\rangle \otimes (\alpha|+\rangle' e^{-igt} + \beta|-\rangle' e^{igt}) + b|-\rangle \otimes (\alpha|+\rangle' e^{igt} + \beta|-\rangle' e^{-igt}) \quad (\text{A.5})$$

Vi skal nu finde tæthedsoperatoren  $\rho(t)$ , der er givet ved  $|\psi(t)\rangle \langle \psi(t)|$ . Først opskrives bra'en  $\langle \psi(t)|$ :

$$\langle \psi(t)| = a^* \langle +| \otimes (\alpha^* \langle +|' e^{igt} + \beta^* \langle -|' e^{-igt}) + b^* \langle -| \otimes (\alpha^* \langle +|' e^{-igt} + \beta^* \langle -|' e^{igt}) \quad (\text{A.6})$$

Nu findes tæthedsoperatoren  $|\psi(t)\rangle \langle \psi(t)|$ , som er en  $4 \times 4$  matrix:

$$\begin{aligned} |\psi(t)\rangle \langle \psi(t)| &= \{(a|+\rangle \otimes \alpha|+\rangle' e^{-igt}) \\ &+ (a|+\rangle \otimes \beta|-\rangle' e^{igt}) \\ &+ (b|-\rangle \otimes \alpha|+\rangle' e^{igt}) \\ &+ (b|-\rangle \otimes \beta|-\rangle' e^{-igt})\} \\ &\times \{(a^* \langle +| \otimes \alpha^* \langle +|' e^{igt}) \\ &+ (a^* \langle +| \otimes \beta^* \langle -|' e^{-igt}) \\ &+ (b^* \langle -| \otimes \alpha^* \langle +|' e^{-igt}) \\ &+ (b^* \langle -| \otimes \beta^* \langle -|' e^{igt})\} \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

Dette kan også skrives op i 4 grupper:

$$\begin{aligned}
& (|a|^2 |+\rangle \langle +|) \otimes (|\alpha|^2 |+\rangle' \langle +|') \\
& + (|a|^2 |+\rangle \langle +|) \otimes \alpha \beta^* |+\rangle' \langle -|' e^{-2igt} \\
& + (ab^* |+\rangle \langle -|) \otimes (|\alpha|^2 |+\rangle' \langle +|' e^{-2igt}) \\
& + (ab^* |+\rangle \langle -|) \otimes \alpha \beta^* |+\rangle' \langle -|' \quad (A.8)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + (|a|^2 |+\rangle \langle +|) \otimes (\beta \alpha^* |-\rangle' \langle +|' e^{2igt}) \\
& + (|a|^2 |+\rangle \langle +|) \otimes (|\beta|^2 |-\rangle' \langle -|') \\
& + (ab^* |+\rangle \langle -|) \otimes (\beta \alpha^* |-\rangle' \langle +|') \\
& + (ab^* |+\rangle \langle -|) \otimes (|\beta|^2 |-\rangle' \langle -|' e^{2igt}) \quad (A.9)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + (ba^* |-\rangle \langle +|) \otimes (|\alpha|^2 |+\rangle' \langle +|' e^{2igt}) \\
& + (ba^* |-\rangle \langle +|) \otimes (\alpha \beta^* |+\rangle' \langle -|') \\
& + (|b|^2 |-\rangle \langle -|) \otimes (|\alpha|^2 |+\rangle' \langle +|') \\
& + (|b|^2 |-\rangle \langle -|) \otimes \alpha \beta^* |+\rangle' \langle -|' e^{2igt} \quad (A.10)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + (a^* b |-\rangle \langle +|) \otimes (\alpha^* \beta |-\rangle' \langle +|') \\
& + (a^* b |-\rangle \langle +|) \otimes (|\beta|^2 |-\rangle' \langle -|' e^{-2igt}) \\
& + (|b|^2 |-\rangle \langle -|) \otimes (\alpha^* \beta |-\rangle' \langle +|' e^{-2igt}) \\
& + (|b|^2 |-\rangle \langle -|) \otimes (|\beta|^2 |-\rangle' \langle -|') \quad (A.11)
\end{aligned}$$

Vi tager nu det partielle spor af  $|\psi(t)\rangle \langle \psi(t)|$  mht. "omgivelsespartiklen" for at få den reducerede tæthedsmatrix  $\rho_r$ . Først ser vi på de led i grupperne (A.8)-(A.11), hvor  $|a|^2 |+\rangle \langle +|$  indgår:

$$|a|^2 |+\rangle \langle +| \otimes \left\{ \begin{aligned} & |\alpha|^2 |+\rangle' \langle +|' + \alpha \beta^* |+\rangle' \langle -|' e^{-2igt} + \\ & \beta \alpha^* |-\rangle' \langle +|' e^{2igt} + |\beta|^2 |-\rangle' \langle +|' \end{aligned} \right. \quad (A.12)$$

$|+\rangle' \langle +|'$  er et matricelement. Vi skal derfor tage sporet af matricen:

$$Tr \begin{pmatrix} |\alpha|^2 & \alpha \beta^* e^{-2igt} \\ \beta \alpha^* e^{2igt} & |\beta|^2 \end{pmatrix} = |\alpha|^2 + |\beta|^2 \quad (A.13)$$



$|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$  (sandsynligheden for at finde "omgivelsespartiklen" i den ene tilstand og sandsynligheden for at finde den i den anden tilstand, må summe til 1). Derfor giver leddet bidraget

$$|a|^2 |+\rangle \langle +| \otimes 1 = |a|^2 |+\rangle \langle +| \quad (\text{A.14})$$

Derefter ser vi på de led i grupperne (A.8)-(A.11), hvor  $|b|^2 |-\rangle \langle -|$  indgår:

$$|b|^2 |-\rangle \langle -| \otimes \left\{ \begin{array}{l} |a|^2 |+\rangle \langle +|' + \alpha\beta^* |+\rangle \langle -|' e^{2igt} \\ + \alpha^*\beta |-\rangle \langle +|' e^{-2igt} + |\beta|^2 |-\rangle \langle +|' \end{array} \right. \quad (\text{A.15})$$

Og vi finder

$$\text{Tr} \begin{pmatrix} |a|^2 & \alpha\beta^* e^{2igt} \\ \alpha^*\beta e^{-2igt} & |\beta|^2 \end{pmatrix} = |a|^2 + |\beta|^2 = 1 \quad (\text{A.16})$$

så dette led bidrager med

$$|b|^2 |-\rangle \langle -| \otimes 1 = |b|^2 |-\rangle \langle -| \quad (\text{A.17})$$

Vi fortsætter med leddene, der indeholder  $ab^* |+\rangle \langle -|$ :

$$ab^* |+\rangle \langle -| \otimes \left\{ \begin{array}{l} |a|^2 |+\rangle \langle +|' e^{-2igt} + \alpha\beta^* |+\rangle \langle -|' \\ + \beta\alpha^* |-\rangle \langle +|' + |\beta|^2 |-\rangle \langle +|' e^{2igt} \end{array} \right. \quad (\text{A.18})$$

$$\text{Tr} \begin{pmatrix} |a|^2 e^{-2igt} & \alpha\beta^* \\ \beta\alpha^* & |\beta|^2 e^{2igt} \end{pmatrix} = e^{2igt} |\beta|^2 + e^{-2igt} |a|^2 \quad (\text{A.19})$$

Fordi sporet er en skalar, gælder der at  $ab^* |+\rangle \langle -| \otimes (e^{2igt} |\beta|^2 + e^{-2igt} |a|^2) = ab^* |+\rangle \langle -| (e^{2igt} |\beta|^2 + e^{-2igt} |a|^2)$ . Vi omskriver højresiden af ligning (A.19):

$$\begin{aligned}
e^{2igt}|\beta|^2 + e^{-2igt}|\alpha|^2 &= |\beta|^2(\cos(2gt) + i\sin(2gt)) + \\
&\quad |\alpha|^2(\cos(2gt) - i\sin(2gt)) \\
&= (|\alpha|^2 + |\beta|^2)\cos(2gt) + \\
&\quad i\sin(2gt)(|\beta|^2 - |\alpha|^2) \quad (A.20)
\end{aligned}$$

og får således bidraget

$$ab^*|+\rangle\langle-|z^*(t) \quad \text{hvor} \quad (A.21)$$

$$z(t) = \cos(2gt) + i(|\alpha|^2 - |\beta|^2)\sin(2gt) \quad (A.22)$$

Så mangler vi bare leddene, hvor  $ba^*|-\rangle\langle+|$  indgår:

$$ba^*|-\rangle\langle+| \otimes \left\{ \begin{aligned} &|\alpha|^2|+\rangle\langle+|e^{2igt} + \alpha\beta^*|+\rangle\langle-| \\ &+ \alpha^*\beta|-\rangle\langle+| + |\beta|^2|-\rangle\langle+|e^{-2igt} \end{aligned} \right. \quad (A.23)$$

$$Tr \begin{pmatrix} |\alpha|^2 e^{2igt} & \alpha\beta^* \\ \alpha^*\beta & |\beta|^2 e^{-2igt} \end{pmatrix} = |\alpha|^2 e^{2igt} + |\beta|^2 e^{-2igt} \quad (A.24)$$

Overvejelser i lighed med ligning (A.20) giver:

$$ba^*|-\rangle\langle+|z(t) \quad (A.25)$$

Her er  $z(t)$  igen givet ved ligning (A.22). Det er nu lykkedes os at vise at hvis man tager det partielle spor af  $|\psi(t)\rangle\langle\psi(t)|$  mht. "omgivelsespartiklen", så får man jvf. ligningerne (A.14), (A.17), (A.21) og (A.25):

$$\begin{aligned}
\rho_r(t) &= |a|^2|+\rangle\langle+| + |b|^2|-\rangle\langle-| + \\
&\quad z^*(t)ab^*|+\rangle\langle-| + z(t)a^*b|-\rangle\langle+| \quad \text{hvor} \quad (A.26)
\end{aligned}$$

$$z(t) = \cos(2gt) + i(|\alpha|^2 - |\beta|^2)\sin(2gt) \quad (A.27)$$

Skrevet på matrixform bliver det:

$$\rho_r(t) = \begin{pmatrix} |a|^2 & z^*(t)ab^* \\ z(t)ba^* & |b|^2 \end{pmatrix} \quad (\text{A.28})$$

Bemærk at  $z(t)$ , der går mod nul ved mange frihedsgrader, styrer off-diagonalelementerne.

# Litteraturliste

Litteraturlisten er opdelt i bøger og artikler.

## Bøger

[Atkins, 1990]

Atkins, P.W

Physical Chemistry

Oxford University Press, 1990.

[Baggott, 1992]

Baggott, Jim

The Meaning of Quantum Theory.

Oxford University Press, 1992.

[Christiansen, 1983]

Christiansen, Peder Voetmann

Verden ifølge Peirce – To metafysiske essays om og af C. S. Peirce.

Tekster fra IMFUFA, nr. 72, Roskilde Universitetscenter, 1983.

[Christiansen, 1990]

Christiansen, Peder Voetmann

Tegn og kvanter.

Tekster fra IMFUFA, nr. 202, Roskilde Universitetscenter, 1990.

[Engel-Tiercelin, 1991]

Engel-Tiercelin, Claudine

Peirce's Logic of Vagueness.

Tekster fra IMFUFA, nr. 205, Roskilde Universitetscenter, 1991.

[Favrholdt, 1994]

Favrholdt, David

Fysik, bevidsthed, liv

Odense Universitetsforlag, Odense, 1994.

[Feynman, 1965]

Feynman Richard P. (et al.)

The Feynman Lectures on Physics, vol. 3

Addison-Wesley Publishing Company, 1965.

[Gasiorowicz, 1974]

Gasiorowicz, Stephen

Quantum physics

John Wiley & Sons, Inc., Singapore, 1974.

[Joachain, 1990]

Joachain, C.J. & Brandtsden, B.H.

Introduction to Quantum mechanics

John Wiley & sons Inc., New York, 1990.

[Leggett, 1987]

Leggett, A. J.

The Problems of Physics

Oxford University Press, Oxford, 1987.

[Nørretranders, 1985]

Nørretranders, Tor

Det udelelige

Gyldendal, København, 1985.

[Omnés, 1994]

Omnés, Roland

The interpretation of quantum mechanics.

Princeton University Press, Princeton, 1994.

[Peirce, 1988]

Peirce, Charles Sanders

Mursten og mørtel til en metafysik.

Fem artikler fra tidsskriftet "The Monist", 1891-93. Introduktion og oversættelse: Peder Voetmann Christiansen.

Tekster fra IMFUFA, nr. 169, Roskilde Universitetscenter, 1988.

[Peirce, 1994]

Peirce, Charles Sanders

Semiotik og pragmatisme (Fra serien Moderne tænkere)

Udvalg og forord ved Anne Marie Dinesen og Frederik Stjernfelt.

Gyldendal, København, 1994.

[Prigogine, 1980]

Prigogine, Ilya

From Being to Becoming.

W. H. Freeman and Company, San Francisco, 1980.

[Rae, 1986]

Rae, Alistair I. M.

Quantum physics: illusion or reality?

Cambridge University Press, Cambridge, 1986.

[Scharff, 1977]

Scharff, Morten

Elementær kvantemekanik.

Akademisk Forlag, København, 1977.

[Sklar, 1992]

Sklar, Lawrence

Philosophy of Physics.

Oxford University Press, Oxford, 1992.

[Van Fraassen, 1991]

Van Fraassen, Bas C.

Quantum Mechanics: An Empiricist View.

Clarendon Press, Oxford, 1991.

## Artikler

[Albert, 1990]

Albert, David and Barry Loewer

Wanted Dead or Alive: Two Attempts to Solve Schrödinger's Paradox.

Philosophy of Science Association, vol. 1, s. 277-285, 1990.

[Christiansen, 1995]

Christiansen, Peder Voetmann

Semiotik i fysikken.

Endnu ikke offentliggjort artikel, 1995.

[Everett, 1957]

Everett III, Hugh 1957

"Relative State" Formulation of Quantum Mechanics.

Reviews of Modern Physics, vol. 29, nr. 3, s. 454-462, 1957.

[Leggett, 1984]

Leggett, A. J.

Schrödinger's Cat and her Laboratory Cousins

Contemporary Physics, vol. 25, nr. 6, s. 583-598, 1984.

[Mermin, 1981]

Mermin, N. D.

Bringing home the atomic world: Quantum mysteries for anybody.

Am. J. Phys. 49(10), 1981.

[Price, 1995]

Price, Michael Clive

Many-Worlds-FAQ.

Artikel på Internet fra 17/2 1995

[Weeler, 1957]

Wheeler, John A.

Assessment of Everett's "Relative State" Formulation of Quantum Theory.

Reviews of Modern Physics, vol. 29, 3, s. 463-465, 1957.

[Zurek, 1982]

Zurek, W. H.

Environment-induced superselection rules.

Physical Review D, vol. 26, nr. 8, s. 1862-1880, 1982.

Liste over tidligere udkomne tekster  
tilsendes gerne. Henvendelse herom kan  
ske til IMFUFA's sekretariat  
tlf. 46 75 77 11 lokal 2263

217/92 "Two papers on APPLICATIONS AND MODELLING  
IN THE MATHEMATICS CURRICULUM"  
by: Mogens Niss

218/92 "A Three-Square Theorem"  
by: Lars Kadison

219/92 "RUPNOK - stationær strømning i elastiske rør"  
af: Anja Boisen, Karen Birkelund, Mette Olufsen  
Vejleder: Jesper Larsen

220/92 "Automatisk diagnosticering i digitale kredsløb"  
af: Bjørn Christensen, Ole Møller Nielsen  
Vejleder: Stig Andur Pedersen

221/92 "A BUNDLE VALUED RADON TRANSFORM, WITH  
APPLICATIONS TO INVARIANT WAVE EQUATIONS"  
by: Thomas P. Branson, Gestur Olafsson and  
Henrik Schlichtkrull

222/92 On the Representations of some Infinite Dimensional  
Groups and Algebras Related to Quantum Physics  
by: Johnny T. Ottesen

223/92 THE FUNCTIONAL DETERMINANT  
by: Thomas P. Branson

224/92 UNIVERSAL AC CONDUCTIVITY OF NON-METALLIC SOLIDS AT  
LOW TEMPERATURES  
by: Jeppe C. Dyre

225/92 "HATMODELLEN" Impedansspektroskopi i ultrarent  
en-krystallinsk silicium  
af: Anja Boisen, Anders Gorm Larsen, Jesper Varmer,  
Johannes K. Nielsen, Kit R. Hansen, Peter Bøggild  
og Thomas Hougaard  
Vejleder: Petr Viscor

226/92 "METHODS AND MODELS FOR ESTIMATING THE GLOBAL  
CIRCULATION OF SELECTED EMISSIONS FROM ENERGY  
CONVERSION"  
by: Bent Sørensen

227/92 "Computersimulering og fysik"  
af: Per M.Hansen, Steffen Holm,  
Peter Maibom, Mads K. Dall Petersen,  
Pernille Postgaard, Thomas B.Schrøder,  
Ivar P. Zeck  
Vejleder: Peder Voetmann Christiansen

228/92 "Teknologi og historie"  
Fire artikler af:  
Mogens Niss, Jens Høyrup, Ib Thiersen,  
Hans Hedal

229/92 "Masser af information uden betydning"  
En diskussion af informationsteorien  
i Tor Nørretranders' "Mærk Verden" og  
en skitse til et alternativ baseret  
på andenordens kybernetik og semiotik.  
af: Søren Brier

230/92 "Vinklens tredeling - et klassisk  
problem"  
et matematisk projekt af  
Karen Birkelund, Bjørn Christensen  
Vejleder: Johnny Ottesen

231A/92 "Elektrondiffusion i silicium - en  
matematisk model"  
af: Jesper Voetmann, Karen Birkelund,  
Mette Olufsen, Ole Møller Nielsen  
Vejledere: Johnny Ottesen, H.B.Hansen

231B/92 "Elektrondiffusion i silicium - en  
matematisk model" Kildetekster  
af: Jesper Voetmann, Karen Birkelund,  
Mette Olufsen, Ole Møller Nielsen  
Vejledere: Johnny Ottesen, H.B.Hansen

232/92 "Undersøgelse om den simultane opdagelse  
af energiens bevarelse og isærdeles om  
de af Mayer, Colding, Joule og Helmholtz  
udførte arbejder"  
af: L.Arleth, G.I.Dybkjær, M.T.Østergård  
Vejleder: Dorte Posselt

233/92 "The effect of age-dependent host  
mortality on the dynamics of an endemic  
disease and  
Instability in an SIR-model with age-  
dependent susceptibility  
by: Viggo Andreassen

234/92 "THE FUNCTIONAL DETERMINANT OF A FOUR-DIMENSIONAL  
BOUNDARY VALUE PROBLEM"  
by: Thomas P. Branson and Peter B. Gilkey

235/92 OVERFLADESTRUKTUR OG POREUDVIKLING AF KOKS  
- Modul 3 fysik projekt -  
af: Thomas Jessen



- 236a/93 INTRODUKTION TIL KVANTE HALL EFFEKTEN  
af: Anja Boisen, Peter Bøggild  
Vejleder: Peder Voetmann Christiansen  
Erland Brun Hansen
- 236b/93 STRØMSSAMMENBRUD AF KVANTE HALL EFFEKTEN  
af: Anja Boisen, Peter Bøggild  
Vejleder: Peder Voetmann Christiansen  
Erland Brun Hansen
- 237/93 The Wedderburn principal theorem and Shukla cohomology  
af: Lars Kadison
- 238/93 SEMIOTIK OG SYSTEMEGENSKABER (2)  
Vektorbånd og tensorer  
af: Peder Voetmann Christiansen
- 239/93 Valgsystemer - Modelbygning og analyse  
Matematik 2. modul  
af: Charlotte Gjerrild, Jane Hansen, Maria Hermannsson, Allan Jørgensen, Ragna Clauson-Kaas, Poul Lützen  
Vejleder: Mogens Niss
- 240/93 Patologiske eksempler.  
Om særlig matematiske fæns betydning for den matematiske udvikling  
af: Claus Dræby, Jørn Skov Hansen, Runa Ulsøe Johansen, Peter Meibom, Johannes Kristoffer Nielsen  
Vejleder: Mogens Niss
- 241/93 FOTOVOLTAISK STATUSNOTAT 1  
af: Bent Sørensen
- 242/93 Brovedligeholdelse - bevar mig vel  
Analyse af Vejdirektoratets model for optimering af broreparationer  
af: Linda Kyndlev, Kare Fundal, Kamma Tulinius, Ivar Zeck  
Vejleder: Jesper Larsen
- 243/93 TANKEEKSPERIMENTER I FYSIKKEN  
Et 1.modul fysikprojekt  
af: Karen Birkelund, Stine Sofia Korremann  
Vejleder: Dorthe Posselt
- 244/93 RADONTRANSFORMATIONEN og dens anvendelse i CT-scanning  
Projektrapport  
af: Trine Andreassen, Tine Guldager Christiansen, Nina Skov Hansen og Christine Iversen  
Vejledere: Gestur Olafsson og Jesper Larsen
- 245a+b/93 Time-Of-Flight målinger på krystallinske halvledere  
Specialerapport  
af: Linda Szkotak Jensen og Lise Odgaard Gade  
Vejledere: Petr Viscor og Niels Boye Olsen
- 246/93 HVERDAGSVIEN OG MATEMATIK - LÆREPROCESSER I SKOLEN  
af: Lena Lindenskov, Statens Humanistiske Forskningsråd, RUC, IMFUFA
- 247/93 UNIVERSAL LOW TEMPERATURE AC CONDUCTIVITY OF MACROSCOPICALLY DISORDERED NON-METALS  
by: Jeppe C. Dyre
- 248/93 DIRAC OPERATORS AND MANIFOLDS WITH BOUNDARY  
by: B. Booss-Bavnbek, K.P.Wojciechowski
- 249/93 Perspectives on Teichmüller and the Jahresbericht Addendum to Schappacher, Scholz, et al.  
by: B. Booss-Bavnbek  
With comments by W.Abiakoff, L.Ahlfors, J.Cerf, P.J.Davis, W.Fuchs, F.P.Gardiner, J.Jost, J.-P.Kahane, R.Lohan, L.Lorch, J.Radkau and T.Söderqvist
- 250/93 EULER OG BOLZANO - MATEMATISK ANALYSE SET I ET VIDENSKABSTEORETISK PERSPEKTIV  
Projektrapport af: Anja Juul, Lone Michelsen, Tomas Højgård Jensen  
Vejleder: Stig Andur Pedersen
- 251/93 Genotypic Proportions in Hybrid Zones  
by: Freddy Bugge Christiansen, Viggo Andreassen and Ebbe Thue Poulsen
- 252/93 MODELLERING AF TILFÆLDIGE FÆNOMENER  
Projektrapport af: Birthe Friis, Lisbeth Helmgaa Kristina Charlotte Jakobsen, Marina Mosbæk Johannessen, Lotte Ludvigsen, Mette Hass Nielsen
- 253/93 Kuglepakning  
Teori og model  
af: Lise Arleth, Kåre Fundal, Nils Kruse  
Vejleder: Mogens Niss
- 254/93 Regressionsanalyse  
Materiale til et statistikkursus  
af: Jørgen Larsen
- 255/93 TID & BETINGET UAFHÆNGIGHED  
af: Peter Harremoës
- 256/93 Determination of the Frequency Dependent Bulk Modulus of Liquids Using a Piezo-electric Spherical Shell (Preprint)  
by: T. Christensen and N.B.Olsen
- 257/93 Modellering af dispersion i piezoelektriske keramikker  
af: Pernille Postgaard, Jannik Rasmussen, Christina Specht, Mikko Østergård  
Vejleder: Tage Christensen
- 258/93 Supplerende kursusmateriale til "Lineære strukturer fra algebra og analyse"  
af: Mogens Brun Heefelt
- 259/93 STUDIES OF AC HOPPING CONDUCTION AT LOW TEMPERATURES  
by: Jeppe C. Dyre
- 260/93 PARTITIONED MANIFOLDS AND INVARIANTS IN DIMENSIONS 2, 3, AND 4  
by: B. Booss-Bavnbek, K.P.Wojciechowski

- 261/93 OPGAVESAMLING  
Bredde-kursus i Fysik  
Eksamensopgaver fra 1976-93
- 262/93 Separability and the Jones Polynomial  
by: Lars Kadison
- 263/93 Supplerende kursusrmateriale til "Lineære strukturer fra algebra og analyse" II  
af: Mogens Brun Heefelt
- 264/93 FOTOVOLTAISK STATUSNOTAT 2  
af: Bent Sørensen
- 
- 265/94 SPHERICAL FUNCTIONS ON ORDERED SYMMETRIC SPACES  
To Sigurdur Helgason on his sixtyfifth birthday  
by: Jacques Faraut, Joachim Hilgert and Gestur Olafsson
- 266/94 Kommensurabilitets-oscillationer i laterale supergitre  
Fysikspeciale af: Anja Boisen, Peter Bøggild, Karen Birkelund  
Vejledere: Rafael Taboryski, Poul Erik Lindelof, Peder Voetmann Christiansen
- 267/94 Kom til kort med matematik på Eksperimentarium - Et forslag til en opstilling  
af: Charlotte Gjerrild, Jane Hansen  
Vejleder: Bernhelm Booss-Bavnbek
- 268/94 Life is like a sewer ...  
Et projekt om modellering af aorta via en model for strømning i kloakrør  
af: Anders Marcussen, Anne C. Nilsson, Lone Michelsen, Per M. Hansen  
Vejleder: Jesper Larsen
- 269/94 Dimensionsanalyse en introduktion metaprojekt, fysik  
af: Tine Guldager Christiansen, Ken Andersen, Nikolaj Hermann, Jannik Rasmussen  
Vejleder: Jens Højgaard Jensen
- 270/94 THE IMAGE OF THE ENVELOPING ALGEBRA AND IRREDUCIBILITY OF INDUCED REPRESENTATIONS OF EXPONENTIAL LIE GROUPS  
by: Jacob Jacobsen
- 271/94 Matematikken i Fysikken.  
Opdaget eller opfundet NAT-BAS-projekt  
vejleder: Jens Højgaard Jensen
- 272/94 Tradition og fornyelse  
Det praktiske elevarbejde i gymnasiets fysikundervisning, 1907-1988  
af: Kristian Hoppe og Jeppe Guldager  
Vejledning: Karin Beyer og Nils Hybel
- 273/94 Model for kort- og mellemdistanceløb  
Verifikation af model  
af: Lise Fabricius Christensen, Helle Pilemann, Bettina Sørensen  
Vejleder: Mette Olufsen
- 274/94 MODEL 10 - en matematisk model af intravenøse anæstetikas farmakokinetik  
3. modul matematik, forår 1994  
af: Trine Andreasen, Bjørn Christensen, Christine Green, Anja Skjoldborg Hansen, Lisbeth Helmgaard  
Vejledere: Viggo Andreasen & Jesper Larsen
- 275/94 Perspectives on Teichmüller and the Jahresbericht 2nd Edition  
by: Bernhelm Booss-Bavnbek
- 276/94 Dispersionsmodellering  
Projektrapport 1. modul  
af: Gitte Andersen, Rehannah Borup, Lisbeth Friis, Per Gregersen, Kristina Vejro  
Vejleder: Bernhelm Booss-Bavnbek
- 277/94 PROJEKTARBEJDSPÆDAGOGIK - Om tre tolkninger af problemorienteret projektarbejde  
af: Claus Flensted Behrens, Frederik Voetmann Christiansen, Jørn Skov Hansen, Thomas Thingstrup  
Vejleder: Jens Højgaard Jensen
- 278/94 The Models Underlying the Anaesthesia Simulator Sophus  
by: Mette Olufsen(Math-Tech), Finn Nielsen (RISØ National Laboratory), Per Føge Jensen (Herlev University Hospital), Stig Andur Pedersen (Roskilde University)
- 279/94 Description of a method of measuring the shear modulus of supercooled liquids and a comparison of their thermal and mechanical response functions.  
af: Tage Christensen
- 280/94 A Course in Projective Geometry  
by Lars Kadison and Matthias T. Kromann
- 281/94 Modellering af Det Cardiovasculære System med Neural Puls kontrol  
Projektrapport udarbejdet af:  
Stefan Frello, Runa Ulsøe Johansen, Michael Poul Curt Hansen, Klaus Dahl Jensen  
Vejleder: Viggo Andreasen
- 282/94 Parallell algoritmer  
af: Erwin Dan Nielsen, Jan Danielsen, Niels Bo Johansen

- 283/94 Grænser for tilfældighed  
(en kaotisk talgenerator)  
af: Erwin Dan Nielsen og Niels Bo Johansen
- 284/94 Det er ikke til at se det, hvis man ikke  
lige ve' det!  
Gymnasiematematikens begrundelsesproblem  
En specialerapport af Peter Hauge Jensen  
og Linda Kyndlev  
Vejleder: Mogens Niss
- 285/94 Slow coevolution of a viral pathogen and  
its diploid host  
by: Viggo Andreasen and  
Freddy B. Christiansen
- 286/94 The energy master equation: A low-temperature  
approximation to Bässler's random walk model  
by: Jeppe C. Dyre
- 287/94 A Statistical Mechanical Approximation for the  
Calculation of Time Auto-Correlation Functions  
by: Jeppe C. Dyre
- 288/95 PROGRESS IN WIND ENERGY UTILIZATION  
by: Bent Sørensen
- 289/95 Universal Time-Dependence of the Mean-Square  
Displacement in Extremely Rugged Energy  
Landscapes with Equal Minima  
by: Jeppe C. Dyre and Jacob Jacobsen
- 290/95 Modellering af uregelmæssige bølger  
Et 3.modul matematik projekt  
af: Anders Marcussen, Anne Charlotte Nilsson,  
Lone Michelsen, Per Mørkegaard Hansen  
Vejleder: Jesper Larsen
- 291/95 1st Annual Report from the project  
LIFE-CYCLE ANALYSIS OF THE TOTAL DANISH  
ENERGY SYSTEM  
an example of using methods developed for the  
OECD/IEA and the US/EU fuel cycle externality study  
by: Bent Sørensen
- 292/95 Fotovoltaisk Statusnotat 3  
af: Bent Sørensen
- 293/95 Geometridiskussionen - hvor blev den af?  
af: Lotte Ludvigsen & Jens Frandsen  
Vejleder: Anders Madsen
- 294/95 Universets udvidelse -  
et metaprojekt  
Af: Jesper Duelund og Birthe Friis  
Vejleder: Ib Lundgaard Rasmussen
- 295/95 A Review of Mathematical Modeling of the  
Controlled Cardiovascular System  
By: Johnny T. Ottesen
- 296/95 RETIKULER den klassiske mekanik  
af: Peder Voetmann Christiansen
- 297/95 A fluid-dynamical model of the aorta with  
bifurcations  
by: Mette Olufsen and Johnny Ottesen